

Milan Merkle

Matematička analiza

Pregled teorije i zadaci

Treće izmenjeno i dopunjeno izdanje

Beograd, 2001.

Sadržaj

Obavezno pročitati	<i>xi</i>
1 Uvod u analizu	1
1.1 Osobine realnih brojeva	1
1.1.1 Kardinalni broj skupa (1) 1.1.2 Algebarski i transcendentni brojevi (5) 1.1.3 Poredak u skupu realnih brojeva (6) 1.1.4 Neke osobine prirodnih brojeva (12)	
1.2 Osobine realnih funkcija	14
1.2.1 Osnovne osobine funkcija (14) 1.2.2 Razni načini definisanja funkcija (22) 1.2.3 Polinomi, stepena i racionalna funkcija (23) 1.2.4 Neke važne formule (24)	
1.3 Kompleksni brojevi i trigonometrijske funkcije	25
1.3.1 Kompleksni brojevi (25) 1.3.2 Trigonometrijske funkcije (27) 1.3.3 Inverzne trigonometrijske funkcije (38)	
1.4 Eksponecijalna i logaritamska funkcija	46
1.4.1 Eksponecijalna i logaritamska funkcija (46) 1.4.2 Hiperboličke funkcije (51) 1.4.3 Elementarne funkcije (53)	
1.5 Kompleksne funkcije*	53
1.5.1 Eksponecijalna i sa njom povezane funkcije (53) 1.5.2 Višeznačne funkcije (57)	
2 Granični procesi	61
2.1 Granične vrednosti nizova	61
2.1.1 Nizovi i njihove granične vrednosti (61) 2.1.2 Beskonačne granične vrednosti (66) 2.1.3 Stolzova teorema (75)	
2.2 Monotoni nizovi	80
2.2.1 Granična vrednost monotonog niza (80) 2.2.2 Broj e (83) 2.2.3 Nalaženje granične vrednosti monotonog i ograničenog niza (85)	

2.3 Podnizovi	92
2.3.1 Podnizovi i njihove granične vrednosti (92) 2.3.2 Najmanja i najveća granična vrednost podniza (94) 2.3.3 Tačka nagomilavanja (97)	
2.4 Kompletnost	99
2.4.1 Cauchyjev niz (99) 2.4.2 Kompletan skup (102) 2.4.3 Banachov stav o nepokretnoj tački (103) 2.4.4 Banachov kriterijum konvergencije nizova i metod iteracije (104)	
2.5 Granične vrednosti funkcija	112
2.5.1 Granična vrednost funkcije (112) 2.5.2 Neprekidna funkcija (114) 2.5.3 Beskonačne granične vrednosti (116) 2.5.4 Osobine graničnih vrednosti (119) 2.5.5 Simboli O, o i \sim . Beskonačno male veličine (132)	
2.6. Neprekidnost i ograničenost funkcija	138
2.6.1 Vrste prekida (138) 2.6.2 Osobine neprekidnih funkcija (140) 2.6.3 Infimum i supremum funkcije (141) 2.6.4 Uniformna neprekidnost (143)	
3 Diferencijalni račun funkcija jedne promenljive	147
3.1 Izvod i diferencijal	147
3.1.1 Definicija izvoda (147) 3.1.2 Logaritamski izvod (157) 3.1.3 Levi i desni izvod. Beskonačan izvod (158) 3.1.4 Geometrijska interpretacija izvoda (162) 3.1.5 Diferencijal funkcije (165)	
3.2 Teoreme o srednjoj vrednosti u diferencijalnom računu i njihove primene	172
3.2.1 Teoreme o srednjoj vrednosti (172) 3.2.2 Prekidi izvoda (175) 3.2.3 Uniformna neprekidnost funkcija (178) 3.2.4 Kontrakcija i Lagrangeova teorema (178) 3.2.5 L'Hospitalovo pravilo (180)	
3.3 Izvodi i diferencijali višeg reda	184
3.3.1 Izvod reda n (184) 3.3.2 Leibnizova formula (191) 3.3.3 Diferencijal reda n (192)	
3.4 Taylorova formula	195
3.4.1 Taylorov polinom i ostatak (195) 3.4.2 Procena ostatka u Taylorovoj formuli (201) 3.4.3 Teorema o jedinstvenosti Taylorovog polinoma. Potencijalni razvoji (208) 3.4.4 Nalaženje graničnih vrednosti pomoću potencijalnih razvoja (215) 3.4.5 Taylorova formula za polinome (219)	
3.5 Monotonost i konveksnost	220
3.5.1 Monotonost (220) 3.5.2 Konveksnost i nejednakosti (224)	
3.6 Ispitivanje funkcija	230
3.6.1 Asimptote (230) 3.6.2 Ispitivanje funkcija (232)	

4 Integralni račun	273
4.1 Neodređeni integral: Osnovni metodi integracije	273
4.1.1 Primitivna funkcija (273) 4.1.2 Smena promenljive (280) 4.1.3 Transformacije podintegralne funkcije (284) 4.1.4 Parcijalna integracija (290)	
4.2 Neke važne klase integrala	294
4.2.1 Integracija racionalnih funkcija (294) 4.2.2 Integracija nekih iracionalnih funkcija (309) 4.2.3 Integracija trigonometrijskih funkcija (312)	
4.3 Određeni integral	324
4.3.1 Definicija određenog integrala (324) 4.3.2 Izračunavanje određenih integrala (330) 4.3.3 Smena promenljive (334) 4.3.4 Parcijalna integracija (341) 4.3.5 Diferenciranje integrala po granici integracije (343) 4.3.6 Nesvojstveni integral (345) 4.3.7 Teoreme o srednjoj vrednosti (351) 4.3.8 Rekurentne formule za izračunavanje određenih integrala (357) 4.3.9 Neelementarne funkcije (367) 4.3.10 Primene određenih integrala (372)	
5 Redovi	381
5.1 Brojni redovi	381
5.1.1 Definicija reda (381) 5.1.2 Pozitivni redovi (392) 5.1.3 Brojni redovi sa članovima proizvoljnog znaka (405) 5.1.4 Apsolutna konvergencija (409)	
5.2 Funkcionalni redovi	415
5.2.1 Uniformna konvergencija niza funkcija (415) 5.2.2 Uniformna konvergencija redova (419) 5.2.3 Stepeni redovi (427) 5.2.4 Maclaurinov red (433)	
6 Metrički prostori i funkcije više promenljivih	453
6.1 Metrički prostori	453
6.1.1 Definicija metričkog prostora (453) 6.1.2 Otvoreni i zatvoreni skupovi (457) 6.1.3 Konvergencija u metričkom prostoru (464) 6.1.4 Preslikavanja metričkih prostora (469) 6.1.5 Normirani prostor (472)	
6.2 Funkcije više promenljivih	474
6.2.1 Granične vrednosti funkcija više promenljivih (474) 6.2.2 Parcijalni izvodi i diferencijabilnost (479) 6.2.3 Diferenciranje složenih funkcija (485)	
7 Diferencijalne jednačine	497
7.1 Uvodni pojmovi i diferencijalne jednačine prvog reda	497
7.1.1 Diferencijalne jednačine i njihova rešenja (497) 7.1.2 Rešavanje nekih diferencijalnih jednačina prvog reda (499) 7.1.3 Jednačine Lagrangea i Clairauta (515) 7.1.4 Riccatijeva jednačina (516) 7.1.5 Diferencijalna jednačina u totalnom diferencijalu (518)	

7.2 Linearne diferencijalne jednačine višeg reda	523
7.2.1 Linearne diferencijalne jednačine i metodi njihovog rešavanja (523)	
7.2.2 Eulerova diferencijalna jednačina (538)	
8 Razni zadaci	541
8.1 Nizovi	541
8.2 Funkcije i izvodi	555
8.2.1 Granične vrednosti funkcija (555) 8.2.2 Neprekidnost i uniformna neprekidnost (560) 8.2.3 Izvodi (563) 8.2.4 Taylorova formula (570) 8.2.5 Teoreme o srednjoj vrednosti (573) 8.2.6 Ispitivanje funkcija (576) 8.2.7 Polinomi (582) 8.2.8 Funkcionalne jednačine (583)	
8.3 Integrali	586
8.4 Redovi	602
8.4.1 Opšte osobine redova (602) 8.4.2 Pozitivni redovi (603) 8.4.3 Redovi proizvoljnog znaka (610) 8.4.4 Uniformna konvergencija nizova (613) 8.4.5 Funkcionalni redovi (615) 8.4.6 Stepeni redovi (618) 8.4.7 Beskonačni proizvodi* (623)	
8.5 Nejednakosti	625
8.6 Metrički prostori	633
8.7 Diferencijalne jednačine	639
8.7.1 Diferencijalne jednačine prvog reda (639) 8.7.2 Diferencijalne jednačine višeg reda (642) 8.7.3 Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova (653)	
8.8 Mešoviti zadaci	659
8.8.1 Granične vrednosti (659) 8.8.2 Izvodi (661) 8.8.3 Funkcije, integrali i redovi (663) 8.8.4 Wallisova i Stirlingova formula. Izračunavanje broja π (670) 8.8.5 Cantorov skup* (674)	
Spisak ilustracija	678
Literatura	680
Registar pojmova	681

Obavezno pročitati

S obzirom na obim izložene materije, svaki korisnik treba, u skladu sa svojim potrebama, da napravi put kroz ovu knjigu. To neće biti teško, jer je sadržaj podeljen na male jedinice, od kojih se neke mogu preskočiti, a neke detaljnije izučavati.

Prvu glavu treba obavezno bar pregledati i upoznati se sa njenim sadržajem, jer se u njoj nalazi veliki broj definicija, teorema i formula koje su preduslov za razumevanje ostalih delova knjige. U ovoj glavi date su, između ostalog, sve uobičajene trigonometrijske formule, kao i definicije raznih pojmova iz Algebre, zajedno sa jednim brojem zadataka koji imaju za cilj da osveže zaboravljeno ili nedovršeno znanje iz srednje škole.

Ako treba naći neki pojam, najpre ga treba potražiti u sadržaju, pa zatim u registru pojmova na kraju knjige, jer se u registru uglavnom ne ponavljaju pojmovi iz sadržaja.

Registar je, po pravilu, uređen po imenicama u pojmovima. Na primer, pojam „neparna funkcija” naći će se pod „funkcija”, a ne pod „neparna”. Na stranici teksta na kojoj se po prvi put pojavljuje, pojam je štampan **masnim slovima**.

Mnogi sadržaji pojavljuju se na više mesta. Na primer, granične vrednosti funkcija uvode se u glavi 2, da bi se ponovo pojavile u glavi 3, gde je čitalac već naoružan L’HOSPITALovim pravilom i TAYLORovom formulom. Da bi se olakšao posao čitaocu koji želi da koristi prečice za stizanje do cilja, na kraju odeljaka i pod-odeljaka pojavljuje se poseban znak za nastavak, koji upućuje na mesto u knjizi gde se ista materija obrađuje.

Odeljak 1.5 posvećen je kompleksnim funkcijama, što ne pripada standardnom kursu Analize, ali može da posluži za dopunski rad sa studentima. Ista primedba odnosi se i na pododeljak 8.8.5 o Cantorovom skupu. Naslovi ovih odeljaka označeni su zvezdicom.

Na sledeće dve stranice nalazi se spisak simbola koji se koriste u tekstu, kao i spisak matematičkih oznaka. Njih treba takođe obavezno pročitati. ▷▷

Simboli u tekstu

- ! Važno (na margini). Označava važne formule i tvrđenja.
- ! Klizavo (na margini). Ovim znakom obeležavaju se mesta gde se lako i često greši.
- ♣ Ideja (na margini). Ovim znakom obeležavamo mesta na kojima se u zadacima uvodi nova ideja.
- ▷▷ 8.4.5 Nastavak u 8.4.5. Znači da se tekst iz iste materije može naći u 8.4.5. Koristi se na kraju odeljaka ili pododeljaka.
- 436.** Zadatak teorijske prirode (na primer, dokaz neke teoreme).
- Označava definiciju u teorijskom delu.
- √ Označava teoremu ili formulu u teorijskom delu.
- Znak za kraj dokaza, teoreme ili rešenja.

Matematičke oznake

N Skup prirodnih brojeva.	$x \mapsto f(x)$ Oznaka za funkciju koja x preslikava u $f(x)$, na primer, funkcija $x \mapsto \sin x$.
Q Skup racionalnih brojeva.	
Z Skup celih brojeva.	$[x]$ Ceo deo broja x . Na primer, $[3.67] = 3$, $[-8.01] = -9$. Simbol $[\cdot \cdot \cdot]$ u tekstu označava samo ovu funkciju i ne koristi se u značenju zagrada.
R Skup realnih brojeva.	
C Skup kompleksnih brojeva.	
\emptyset Prazan skup.	$\operatorname{sgn} x$ Znak broja x , signum. Ako je $x > 0$, tada je $\operatorname{sgn} x = 1$, za $x < 0$ je $\operatorname{sgn} x = -1$ i $\operatorname{sgn} 0 = 0$.
$\{x \mid P(x)\}$ Skup svih x (iz nekog skupa) koji imaju osobinu P . Na primer, $\{x \mid 1 < x < 2\}$ je skup svih brojeva između 1 i 2.	NZD (m, n) Najmanji zajednički delilac prirodnih brojeva m i n .
(a, b) Interval (otvoreni interval), skup $\{x \mid a < x < b\}$.	NZS (m, n) Najmanji zajednički sadržalac prirodnih brojeva m i n .
$[a, b]$ Segment (zatvoreni interval), skup $\{x \mid a \leq x \leq b\}$.	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.
$(a, b]$ Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup $\{x \mid a < x \leq b\}$.	$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$.
$[a, b)$ Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup $\{x \mid a \leq x < b\}$.	$(2n + 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1)$.
	$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}, a \in \mathbf{R}$.

Ostale matematičke oznake objašnjene su na mestima gde se po prvi put pojavljuju i mogu se naći u registru.