Rešenje. Kako je ovo neprava funkcija, deljenjem nalazimo da je

$$f(x) = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} \ .$$

Prema postupku navedenom u teoremi 1.7, važi razlaganje

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \ , \tag{11}$$

odnosno

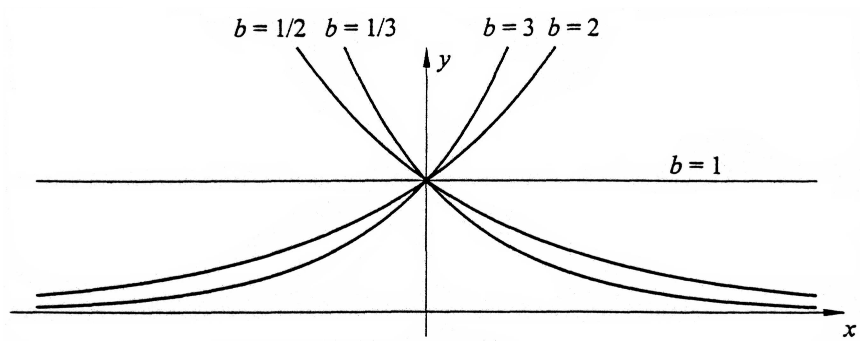
$$5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2) \ . \tag{12}$$

Koeficijente A, B, C možemo naći metodom neodređenih koeficijenata ili, što je jednostavnije, zamenom tri proizvoljne vrednosti za x u jednakost (12). Ako stavimo $x = 0, 2, 3$ neposredno nalazimo da je $A = 1/6$, $B = -9/2$, $C = 28/3$, pa važi jednakost:[1]

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)} \ .$$

1.4.4. Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Ako je $b > 0$, eksponencijalna funkcija je preslikavanje $x \mapsto b^x$ i definisano je za svako $x \in \mathbb{R}$. Broj b naziva se ***osnovom*** eksponencijalne funkcije. Isto kao kod stepene funkcije, ovde za sada imamo problema sa strogim definisanjem ove funkcije za slučaj kada x nije racionalan broj. Aproksimacija iracionalnog broja svojim decimalnim razvojem sa konačno mnogo decimala može i ovde poslužiti kao primer rešavanja tog problema.



Slika 4. Eksponencijalna funkcija za razne vrednosti osnove b.

Eksponencijalna funkcija sa osnovom $b > 1$ je monotono rastuća na $\mathbb{R}$, dok je eksponencijalna funkcija sa $0 < b < 1$ monotono opadajuća. Ako je $b = 1$, onda je $b^x = 1$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Za svako $x \in \mathbb{R}$ i za svaku pozitivnu osnovu važi da je $b^x > 0$.

U matematici i njenim primenama posebno je važna eksponencijalna funkcija sa osnovom $e = 2.71828\ldots$. Videćemo kasnije (primer 20) kako se broj e definiše

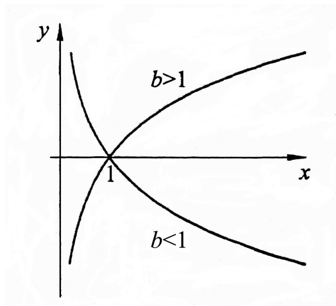
[1] Iako (11) ne važi za $x = 0, 2, 3$, relacija (12) je jednakost polinoma, pa mora da važi za svako $x \in \mathbb{R}$. Zato je dozvoljeno uvrstiti navedene vrednosti u (12).

i izračunava. Za eksponencijalnu funkciju sa osnovom e koristi se i oznaka exp: $y = e^x = \exp x$.

Kako je eksponencijalna funkcija sa osnovom $b \neq 1$ strogo monotona, ona ima inverznu funkciju – to je logaritamska funkcija. Imamo da je

$$y = \log_b x \iff b^y = x.$$

Logaritamska funkcija se može definisati za svaku pozitivnu osnovu $b \neq 1$; njen domen je interval $(0, +\infty)$. Ako je $b > 1$, ova funkcija je monotono rastuća, a za $0 < b < 1$ je monotono opadajuća. Logaritam nije definisan za osnovu $b = 1$.



Slika 5. Logaritamska funkcija za dve vrednosti osnove b.

Logaritam za osnovu e naziva se ***prirodnim logaritmom*** i tradicionalno se obeležava sa $\ln x$. U novije vreme preovlađuje oznaka $\log x$ (koja je ranije korišćena za logaritme za osnovu 10) i mi ćemo u daljem tekstu upotrebljavati isključivo tu oznaku:

$$\boxed{\log x \equiv \ln x \equiv \log_e x.}$$

√ Nekoliko osobina logaritamske funkcije:

$$\log_b |xy| = \log_b |x| \cdot \log_b |y| \ ,$$
$$\log_b |x|^a = a \log_b |x| \ ,$$
$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \ .$$

Iz navedenih osobina, kao specijalan, ali važan slučaj, dobija se

√ $$\log_b \frac{1}{x} = -\log_b x \ .$$

Eksponencijalna i logaritamska funkcija imaju posebnu ulogu u matematici, jer se pomoću njih mogu izraziti druge funkcije. Za stepenu funkciju na primer, imamo da je

$$x^a = e^{a \log x} \qquad (a > 0).$$!

U vezi sa eksponencijalnom funkcijom su tzv. ***hiperbolične funkcije***: sinus hiperbolički, kosinus, tangens i kotangens hiperbolički. One se definišu na sledeći način:

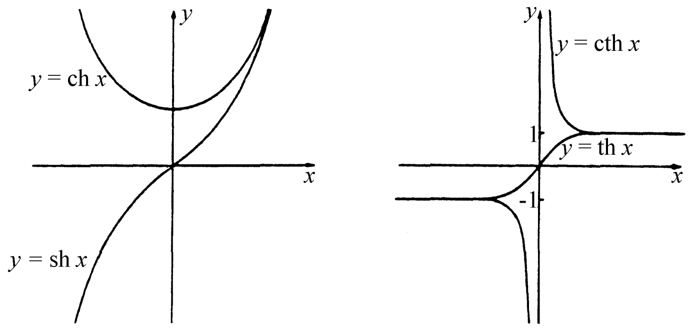
$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Ove funkcije su dobile svoje nazive po izvesnoj analogiji sa trigonometrijskim funkcijama. Neposredno iz definicije može se videti da je

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

a i ostale formule su po obliku iste ili slične odgovarajućim trigonometrijskim.



Slika 6. Grafici hiperboličkih funkcija.

Međutim, iako su formule analogne, hiperboličke funkcije po obliku grafika ne liče na odgovarajuće trigonometrijske. Nijedna od njih nije periodična, a funkcije $x \mapsto \operatorname{sh} x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$ i $x \mapsto \operatorname{cth} x$ su neograničene.

Funkcija $x \mapsto \operatorname{sh} x$ je monotono rastuća. Njena inverzna funkcija, area sinus hiperbolički, definiše se pomoću relacije

$$y = \operatorname{arsh} x \iff x = \operatorname{sh} y, \qquad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}.$$

Jednačina $x = \operatorname{sh} y = (e^y - e^{-y})/2$ može se rešiti po y, uvođenjem smene $e^y = t$. Tako se dobija da je

$$\operatorname{arsh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Funkcija $x \mapsto \operatorname{ch} x$ nije monotona na $\mathbb{R}$, ali je monotona na $[0, +\infty)$. Ako se potraži nenegativno rešenje y jednačine $x = \operatorname{ch} y = (e^x + e^{-x})/2$, dobija se

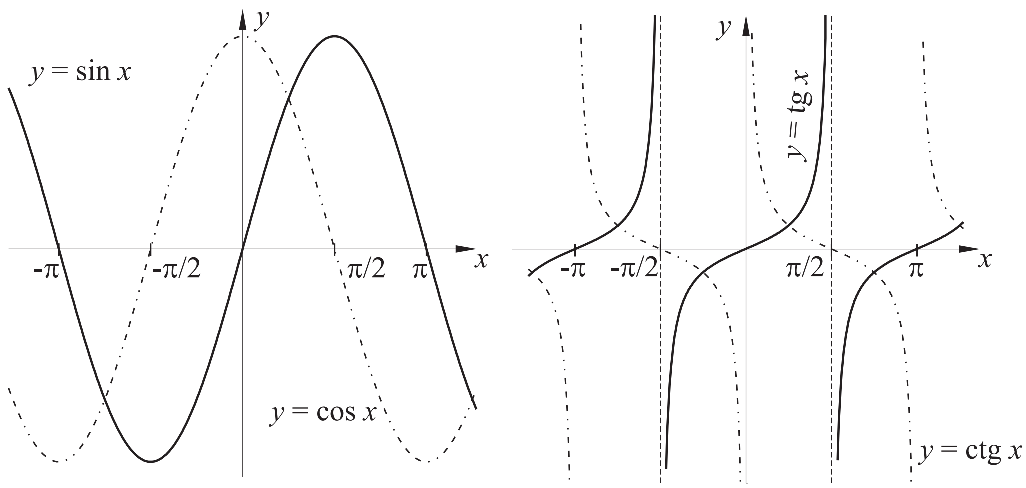
$$y = \operatorname{arch} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad x \geq 1, y \geq 0.$$

◇◇ strana 40, zadaci 87-99

1.4.5. Trigonometrijske funkcije

Funkcije $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$ i $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ mogu se definisati za uglove trougla polazeći od geometrijskih činjenica, a zatim se periodično produžuju na celu realnu osu. Osnovni (najmanji) period funkcija $x \mapsto \sin x$ i $x \mapsto \cos x$ je 2π, a funkcije $x \mapsto \operatorname{tg} x$ i $x \mapsto \operatorname{ctg} x$ imaju osnovni period π.

Jedinica mere ugla je radijan ($180° = \pi$ rad). Neke karakteristične vrednosti funkcije $x \mapsto \sin x$ su date u tabeli:



Slika 7. Grafici trigonometrijskih funkcija

x	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$
$\sin x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

$\checkmark$ Navodimo osnovne trigonometrijske jednakosti:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \, \cos y \mp \sin x \, \sin y, \quad \sin(x \pm y) = \sin x \, \cos y \pm \cos x \, \sin y\,,$$

$$\mathrm{tg}\,(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\,x \pm \mathrm{tg}\,y}{1 \mp \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}\ .$$

Ako u ovim formulama stavimo $y = x$, dobijamo

$$\sin 2x = 2\sin x \, \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \mathrm{tg}\,2x = \frac{2\mathrm{tg}\,x}{1 - \mathrm{tg}^{\,2} x}\ .$$

Funkcije polovine ugla se nalaze iz:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\,,$$

pri čemu se uzima znak + ili − u zavisnosti od toga u kom se kvadrantu nalazi $x/2$.

Iz EULERove formule $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ dobijaju se sledeće jednakosti:

$\checkmark$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\ , \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\ . \qquad !$$

Pored pomenutih funkcija, definišu se i funkcije sekans i kosekans:

•
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}\ , \quad \mathrm{cosec}\ x = \frac{1}{\sin x}\ .$$

✓ ***Pretvaranje zbira trigonometrijskih funkcija u proizvod:***

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}$$

Navedene jednakosti mogu da se izvedu primenom EULERove formule. Na primer,

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta &= \operatorname{Im}\,\left(e^{i\alpha}+e^{i\beta}\right)\\
&= \operatorname{Im}\,\left(e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}+e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right)\\
&= \operatorname{Im}\,\left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)\right)\\
&= \operatorname{Im}\,\left(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
&= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ .
\end{aligned}$$

Kombinacija koja nedostaje ($\sin\alpha+\cos\beta$) svodi se na postojeće formule pomoću jednakosti

$$\begin{aligned}
\sin\alpha+\cos\beta &= \sin\alpha+\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)\\
&= 2\sin\frac{\alpha-\beta+\pi/2}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\pi/2}{2}\ .
\end{aligned}$$

✓ ***Pretvaranje proizvoda trigonometrijskih funkcija u zbir:***

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)
\end{aligned}$$

Ove formule se izvode iz prethodnih ili obrnuto. Na primer, znajući da je

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,$$

smenom $u=(\alpha+\beta)/2$, $v=(\alpha-\beta)/2$, imamo, čitajući unatrag:

$$2\sin u\cos v=\sin\alpha+\sin\beta=\sin(u+v)+\sin(u-v)\ .$$

✓ Pomoću jedne od trigonometrijskih funkcija mogu se izraziti i ostale (sa tačnošću do znaka):

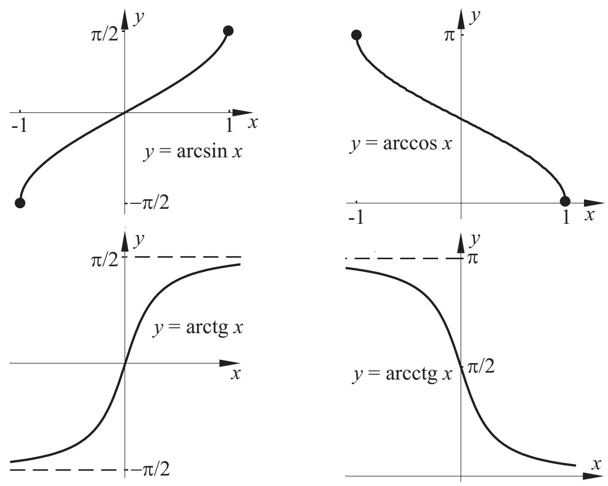
$$\sin x = t \ : \qquad \cos x = \pm\sqrt{1-t^2}\ , \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{sgn}(\cos x)\cdot\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\ ,$$

$$\cos x = t \ : \qquad \sin x = \pm\sqrt{1-t^2}\ , \qquad \operatorname{tg} x = \operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\ ,$$

$$\operatorname{tg} x = t \ : \qquad \sin x = \operatorname{sgn}(\cos x)\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ , \qquad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\ ,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \ : \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ , \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ .$$

U prve tri formule znak se određuje prema tome u kom kvadrantu se nalazi x.



Slika 8. Inverzne trigonometrijske funkcije

Osnovne trigonometrijske funkcije su periodične i zato nemaju inverznu funkciju na skupu $\mathbb{R}$. Na primer, jednačina (po y) $\sin y = x$ ima beskonačno mnogo rešenja y za svako dato $x \in [-1,1]$. Međutim, ako tražimo rešenje ove jednačine samo na nekom od intervala dužine π na kome je funkcija $y \mapsto \sin y$ monotona, dobićemo jedno i samo jedno rešenje za svako $x \in [-1,1]$. Ako se rešenje traži na segmentu $[-\pi/2, \pi/2]$, dobija se funkcija $x \mapsto \arcsin x$:

- $$y = \arcsin x \iff x = \sin y \ \wedge \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ .$$

Na sličan način se definišu ostale inverzne trigonometrijske funkcije:

- $$y = \arccos x \iff x = \cos y \ \wedge \ y \in [0,\pi]\ ,$$
- $$y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} x \ \wedge \ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\ ,$$
- $$y = \operatorname{arcctg} x \iff x = \operatorname{ctg} y \ \wedge \ y \in (0,\pi)\ .$$

Iz ovih definicija proizilazi da je, na primer,

$$\sin(\arcsin x) = x\ ,$$