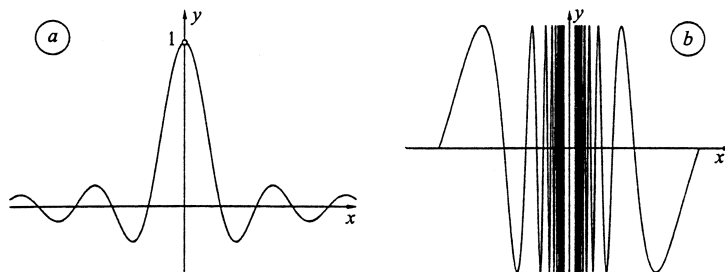


3.1. Granične vrednosti funkcija

3.1.1. Definicija i osnovne osobine

Da bismo motivisali definiciju granične vrednosti funkcija, dajemo dva primera.

- Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Funkcija f je definisana za svako $x \neq 0$. Šta se dešava sa vrednostima $f(x)$ kada se x neograničeno približava nuli? Crtanjem grafika posmatrane funkcije uz pomoć računara, za $x \in (-4, 4)$, dobijamo sliku 11a.



Slika 11. Grafici funkcija dobijeni crtanjem pomoću računara: a) $y = \sin x/x$, b) $y = \sin(1/x)$.

Sa slike stičemo utisak da, ako bi se posmatrač kretao duž grafika funkcije tako da mu se x -koordinata neograničeno približava nuli, njegova y -koordinata bi se neograničeno približavala jedinici. Kaže se da je limes ove funkcije kad $x \rightarrow 0$ (kad x teži nuli) jednak 1.

- Na slici 11b prikazan je crtež funkcije $y = \sin \frac{1}{x}$, koja takođe nije definisana za $x = 0$. Ako bi se posmatrač kretao po grafiku ove funkcije tako da mu se x -koordinata približava nuli, njegova y -koordinata bi beskonačno mnogo puta opisivala sve vrednosti između -1 i 1 . U ovom slučaju, kažemo da $f(x)$ nema limes, ili da divergira, kad $x \rightarrow 0$.

Važno je odmah primetiti da limes, odnosno nepostojanje limesa ne zavisi od same vrednosti funkcije u tački u kojoj se traži limes. U stvari, u oba prethodna primera, funkcija nije definisana u $x = 0$, ali ako bismo je definisali na potpuno proizvoljan način (recimo, $f(0) = 0$, ili $f(0) = -10$), u prvom slučaju limes bi i dalje bio jednak 1, a u drugom ne bi postojao. Takođe, limes ne zavisi od vrednosti funkcije daleko od tačke u kojoj se traži limes. Prema tome,

- Limes funkcije u nekoj tački *ne zavisi* od vrednosti funkcije u toj tački.
- Limes funkcije *zavisi* od vrednosti funkcije u okolini tačke.
- Limes funkcije *ne zavisi* od vrednosti funkcije van bilo koje okoline tačke u kojoj se limes traži.

Da bi zamišljeni posmatrač mogao da, kretanjem po grafiku funkcije neograničeno približi svoju x -koordinatu tački a , u kojoj se traži limes, nije neophodno da je funkcija definisana u tački a . Međutim, neophodno je da je ona definisana u nekoj, proizvoljno maloj, okolini tačke a (osim eventualno u samoj tački a). Drugim rečima, to znači da možemo da govorimo o limesu funkcije $f(x)$ kad $x \rightarrow a$ jedino ako je a tačka nagomilavanja domena funkcije f .

Na primer, proizvoljan niz $\{x_n\}$ možemo shvatiti i kao funkciju čiji je domen skup prirodnih brojeva, \mathbb{N} . Kako ovaj skup ima samo jednu tačku nagomilavanja, a to je $+\infty$, možemo da definišemo samo limes niza $\{x_n\}$ kad $n \rightarrow +\infty$. Nema smisla govoriti o limesu niza kad $n \rightarrow 1/2$, na primer.

Formalna definicija limesa funkcije je sledeća.

Definicija 3.1. Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbb{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D .

- Kažemo da funkcija f ima graničnu vrednost A kad x teži ka a , u oznaci $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ako važi
- $$(1) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Navedena definicija može se iskazati na sledeće ekvivalentne načine:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $f(D \cap (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}) \subset (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ako i samo ako za svaku okolinu V tačke A postoji okolina U tačke a tako da je $f(D \cap U \setminus \{a\}) \subset V$.

Za primenu uslova definicije 3.1 važe primedbe analogne onima koje smo naveli iza definicije granične vrednosti niza. Znaci nejednakosti $<$ mogu se zameniti sa \leq , a uslov definicije može se proveriti samo za $\varepsilon < \varepsilon_0$ (odnosno, za **malo** ε) ako je to lakše. Pored toga, umesto $|f(x) - A| < \varepsilon$, dovoljno je pokazati da je $|f(x) - A| < C\varepsilon$, gde je C konstanta. !

Tehnika dokazivanja je slična kao kod nizova. I ovde nejednakosti imaju važnu ulogu. !

Primer 32. Dokazati, primenom definicije 3.1, da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Dokaz. • Neka je $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Može se dokazati (teorema 1.6 i zadatak ??) da za $|x| \in (0, \pi/2)$ važe nejednakosti

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|.$$

Deljenjem sa $|\sin x|$ dobijamo da je $1 < |x|/|\sin x| < 1/|\cos x|$. Kako su $x, \sin x$ i $\cos x$ pozitivni za $|x| < \pi/2$, imamo da je

$$(2) \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad \text{odnosno} \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

- Neka je ε bilo kakav pozitivan broj. Iz nejednakosti 2 zaključujemo da je

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

kad god je

$$1 - \cos x < \varepsilon, \quad \text{odnosno,} \quad \cos x > 1 - \varepsilon.$$

- Kako je nejednakost $\cos x > 1 - \varepsilon$ ispunjena ako i samo ako je $|x| < \arccos(1 - \varepsilon)$, zaključujemo da za svako dato $\varepsilon \in (0, 1)$ postoji $\delta = \arccos(1 - \varepsilon)$ takvo da je $|f(x) - 1| < \varepsilon$ za svako $x \neq 0$ za koje je $|x| < \delta$.
- Prema tome, uslov iz definicije je zadovoljen, pa je zaista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, kao što smo to naslutili sa slike.

Primer 33. Dokazati da ne postoji granična vrednost funkcije $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, kad $x \rightarrow 0$.

- Dokaz.**
- U svakoj δ -okolini nule postoji beskonačno mnogo brojeva oblika $x_n = 2/n\pi$, u kojima funkcija uzima vrednosti $g(x_n) = \sin \frac{n\pi}{2} \in \{-1, 0, 1\}$.
 - Ako bi postojao $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = A$, onda bi se u svakoj ε -okolini broja A nalazili brojevi $-1, 0$ i 1 , što je nemoguće. Dakle, granična vrednost ne postoji.

U nekim slučajevima uslov (1) u definiciji 3.1 ispunjen je samo za $x < a$ ili samo za $x > a$. Tada govorimo o jednostranim – levim ili desnim graničnim vrednostima.

Definicija 3.2. Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbb{R}$ i neka je a tačka nagomilavanja skupa D takva da se u svakoj njenoj okolini nalazi neko $x \in D$ sa leve strane tačke a (tj. $x < a$). Ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad a - \delta < x < a \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

tada kažemo da je realan broj A **leva granična vrednost** funkcije f kad $x \rightarrow a$ i pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

Analogno, ako je a tačka nagomilavanja skupa D takva da se u svakoj njenoj okolini nalazi neko $x \in D$, $x > a$ i ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad a < x < a + \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon,$$

tada kažemo da je A **desna granična vrednost** funkcije f kad $x \rightarrow a$, u oznaci

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A.$$

Za levu, odnosno desnu graničnu vrednost, ukoliko one postoje, upotrebljavamo i oznake

$$f(a_-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow a-} f(x), \quad f(a_+) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

Nije teško videti da obostrana granična vrednost (u smislu definicije 3.1) postoji ako i samo ako postoje leva i desna granična vrednost i ako su te granične vrednosti međusobno jednake.

!

Primer 34. Neka je funkcija H definisana definisana sa

$$H(t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Jednostavno se proverava da je

$$H(0_-) = \lim_{x \rightarrow 0_-} H(x) = 0, \quad H(0_+) = \lim_{x \rightarrow 0_+} H(x) = 1. \quad \square$$

Ova funkcija je jedna od varijanti tzv. HEAVISIDEOVE funkcije.

Definicija 3.1 odnosi se na slučaj kada su a i A realni brojevi. S obzirom da smo uveli pojam okoline beskonačnosti (na strani 52), treća ekvivalentna definicija u 3.1 može se primeniti i u slučaju kada je a ili A beskonačno.

Definicija 3.3. Kažemo da je granična vrednost funkcije f kad $x \rightarrow a$ jednaka $+\infty$, u oznaci $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ako je a tačka nagomilavanja domena D funkcije f i ako važi

$$(\forall K > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > K.$$

Kažemo da je granična vrednost funkcije f kad $x \rightarrow +\infty$ jednaka $A \in \mathbb{R}$, u oznaci $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ako domen D funkcije f nije ograničen odozgo i ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in D) \quad x > B \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

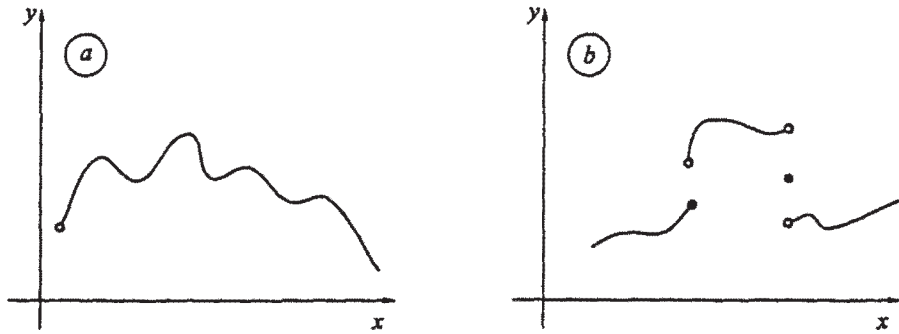
Na analogan način definišu se leva i desna beskonačna granična vrednost, granična vrednost u $-\infty$ itd.

Primer 35. Neka je $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. Za $K > 0$, nejednakost $f(x) > K$ ekvivalentna je sa $|x - 1| < 1/\sqrt{K}$, pa je $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$. Ovde se može primeniti i simboličko pravilo koje smo načili kod nizova: $\frac{1}{0_+} = +\infty$. \square

Posmatrajmo sada grafike na slici 12.

Grafik na slici 12a) je neprekidan, u smislu da posmatrač može da se kontinuirano kreće po njemu. Grafik na slici 12b) ima prekide: posmatrač ne bi mogao, kretanjem duž grafika, da iz tačke A dođe do tačke B .

Pojam neprekidnosti formalizujemo u sledećoj definiciji.



Slika 12. a) Grafik neprekidne funkcije; b) Grafik funkcije koja ima prekide.

Definicija 3.4. Neka je funkcija f definisana na skupu $D \subset \mathbb{R}$ i neka je $a \in D$ tačka nagomilavanja skupa D . Za funkciju f kažemo da je **neprekidna** u tački a ako je

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Ekvivalentno, funkcija f je neprekidna u tački a ako važi

$$(4) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Uslov (3) odražava intuitivnu predstavu o neprekidnosti grafika funkcije. Osobina neprekidnosti je lokalno svojstvo, u smislu da je određeno ponašanjem funkcije u nekoj okolini tačke. Ako je funkcija neprekidna u svakoj tački nekog skupa A , kažemo da je **neprekidna na skupu A** .

Primer 36. Sve osnovne elementarne funkcije su neprekidne na svom domenu. Dajemo dokaz za eksponencijalnu, logaritamsku i sinusnu funkciju.

• **Eksponencijalna funkcija:** Neka su x i a proizvoljni realni brojevi i neka je $0 < \varepsilon < e^a$. Imamo da je

$$|e^x - e^a| < \varepsilon \iff e^a - \varepsilon < e^x < e^a + \varepsilon \iff \log(e^a - \varepsilon) < x < \log(e^a + \varepsilon).$$

Otvoreni interval sa krajnjim tačkama $\log(e^a \pm \varepsilon)$ sigurno sadrži broj a , jer je, zbog monotonosti funkcije $x \mapsto \log x$,

$$\log(e^a - \varepsilon) < \log e^a < \log(e^a + \varepsilon).$$

To znači da postoji neko $\delta > 0$ takvo da je $(a - \delta, a + \delta) \subset (\log(e^a - \varepsilon), \log(e^a + \varepsilon))$. Na osnovu izvedenog, zaključujemo da važi

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \implies x \in (\log(e^a - \varepsilon), \log(e^a + \varepsilon)) \implies |e^x - e^a| < \varepsilon,$$

pa je funkcija $x \mapsto e^x$ neprekidna u svakoj tački $a \in \mathbb{R}$.

• **Logaritamska funkcija:** Neka su x i a proizvoljni pozitivni brojevi i neka je $\varepsilon > 0$. Tada je

$$\begin{aligned} |\log x - \log a| < \varepsilon &\iff \log a - \varepsilon < \log x < \log a + \varepsilon \\ &\iff e^{\log a - \varepsilon} < x < e^{\log a + \varepsilon} \iff e^{-\varepsilon} a < x < e^{\varepsilon} a. \end{aligned}$$

Isto kao pod 1°, može se pokazati da interval $(e^{-\varepsilon}a, e^{\varepsilon}a)$ sadrži neki interval $(a-\delta, a+\delta)$; za takvo δ imamo da je $|\log x - \log a| < \varepsilon$ za svako $x > 0$ u intervalu $(x-\delta, x+\delta)$, što, prema definiciji znači da je funkcija $x \mapsto \log x$ neprekidna u tački $a > 0$.

• **Sinusna funkcija:** Neka su x i a proizvoljni realni brojevi. Prema teoremi 1.6 na strani 8, važi nejednakost

$$|\sin x - \sin a| \leq |x - a|.$$

Iz ove nejednakosti direktno sleduje neprekidnost funkcije $x \mapsto \sin x$ u svakoj realnoj tački a . Naime, ako je $|x-a| < \varepsilon$, onda je, prema navedenoj nejednakosti i $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$, pa je uslov definicije ispunjen za $\delta = \varepsilon$. \square

U klasičnoj NEWTONovoj mehanici isključivo neprekidne funkcije se pojavljuju u matematičkim modelima. Zavisnost bilo koje fizičke veličine od vremena je neprekidna funkcija. Makroskopski posmatrano, u prirodi se ništa ne događa u „skokovima”, tako da se fizičke promene mogu opisati samo neprekidnim funkcijama. Međutim, ako se priroda modelira na nivou atoma, kvantna mehanika pokazuje da se promene dešavaju u diskretnim vremenskim trenucima i da funkcije koje ih opisuju nisu neprekidne.

Ako funkcija nije neprekidna u nekoj tački a svog domena, kažemo da u toj tački ima prekid. Ako je a tačka nagomilavanja domena, funkcija f ima prekid u a ako i samo ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$. Ova relacija može se ostvariti na dva načina: (i) Postoji $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ali nije jednak $f(a)$; (ii) Ne postoji $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. To dovodi do sledeće klasifikacije tačaka prekida.

Definicija 3.5. Neka je funkcija f definisana na skupu D i neka je $a \in D$ tačka nagomilavanja skupa D .

- Kažemo da funkcija f ima u tački a **prekid prve vrste sleva** ako postoji konačan $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ ali nije jednak $f(a)$. Analogno se definiše prekid prve vrste zdesna.
- Ako postoji konačan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ (odnosno ako su leva i desna granična vrednost funkcije $x \mapsto f(x)$ kad $x \rightarrow a$ jednake i konačne, ali nisu jednake vrednosti $f(a)$) kažemo da u tački a funkcija f ima **otklonjiv prekid**. Ovo je poseban slučaj prekida prve vrste.
- Ako leva granična vrednost funkcije $x \mapsto f(x)$ ne postoji ili je beskonačna, kažemo da funkcija f ima u tački a **prekid druge vrste sleva**. Analogno se definiše i prekid druge vrste zdesna.
- Za funkciju koja nema prekid u tački a sa jedne strane, kažemo da je neprekidna sa te strane (sleva ili zdesna). Za funkciju koja je definisana na zatvorenom intervalu $[a, b]$ kaže se da je neprekidna na tom intervalu ako je neprekidna u svakoj tački iz (a, b) , neprekidna zdesna u a i neprekidna sleva u b .

Termin „tačka prekida” koristi se i za one tačke nagomilavanja domena u kojima funkcija nije definisana. Na primer, za funkciju $f(x) = 1/x$ kažemo da ima prekid druge vrste u nuli, iako nije definisana za $x = 0$.

Primer 37. Funkcija f definisana sa $f(x) = \sin x/x$ ($x \neq 0$) ima otklonjiv prekid u nuli, jer je $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Ako se funkcija definiše tako da je $f(0) = 1$, ona postaje neprekidna.

Primer 38. Neka je funkcija $x \mapsto \chi(x)$ definisana sa¹

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Kako se u svakoj okolini racionalnog broja nalazi beskonačno mnogo iracionalnih brojeva, i u svakoj okolini iracionalnog broja ima beskonačno mnogo racionalnih, ne postoji $\lim_{x \rightarrow a} \chi(x)$ ni za jedno $a \in \mathbb{R}$. Dakle, funkcija χ ima prekid druge vrste² u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$. \square

Sledeća teorema tvrdi da monotona funkcija ne može imati prekide druge vrste, tj. da u svakoj tački u kojoj je definisana ima limes i sa leve i sa desne strane. Ideja dokaza je ista kao u dokazu teoreme 2.12 o konvergenciji monotonog i ograničenog niza.

Teorema 3.1. *Funkcija koja je definisana i monotona na intervalu $[a, b]$ može na tom intervalu imati samo prekide prve vrste i to najviše prebrojivo mnogo takvih prekida.*

Dokaz. • Neka je funkcija f definisana u svim tačkama intervala $[a, b]$ i monotono neopadajuća na tom intervalu. Neka je c proizvoljna tačka intervala $[a, b]$. Pokazaćemo da u tački c postoji i desni i levi limes funkcije f .

• Zbog monotonosti funkcije f , skup vrednosti funkcije na $[a, c)$ ograničen je odozgo (sa $f(c)$), pa postoji konačan

$$\sup_{x \in [a, c)} f(x) = L.$$

• Prema osobini supremuma, za svako $\varepsilon > 0$ postoji neko $x_0 \in [a, c)$ takvo da je $L - \varepsilon < f(x_0) \leq L$. Zbog monotonosti funkcije f , imamo da je $f(x) > L - \varepsilon$ i za svako $x \geq x_0$. Uz oznaku $\delta = c - x_0$, dokazali smo da važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a, c)) \quad c - \delta < x < c \implies L - \varepsilon < f(x) < L,$$

što znači da je

$$f(c_-) = \lim_{x \rightarrow c_-} f(x) = L = \sup_{x \in [a, c)} f(x).$$

• Na isti način dokazuje se da je

$$f(c_+) = \lim_{x \rightarrow c_+} f(x) = \inf_{x \in (c, b]} f(x).$$

¹Grčko slovo χ čita se kao „hi”.

²Ova funkcija je poznata pod nazivom DIRICHLETova funkcija. Njen grafik se ne može nacrtati. Postoje i neprekidne funkcije čiji se grafik ne može nacrtati!

- Dakle, ukoliko funkcija ima prekid u proizvoljnoj tački $c \in [a, b]$, to može biti samo prekid prve vrste. Pri tome je očigledno $f(c_-) < f(c_+)$ i intervali oblika $(f(c_-), f(c_+))$ su disjunktne za različite tačke prekida c (zbog monotonosti funkcije f). U svakom od tih intervala izaberimo po jedan racionalan broj i definišimo preslikavanje kojim se tačka prekida c preslikava u izabrani racionalni broj. Kako su intervali disjunktne, izabrani racionalni brojevi su međusobno različiti, pa je opisano preslikavanje bijekcija skupa tačaka prekida u neki podskup skupa racionalnih brojeva. Kako je skup racionalnih brojeva prebrojiv, zaključujemo da je skup tačaka prekida konačan ili prebrojiv.
- U slučaju nerastuće funkcije, dokaz je analogan.

3.1.2. Veza između graničnih vrednosti nizova i funkcija

Teorema 3.2. *Neka je $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tačka nagomilavanja domena D funkcije f . Tada je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ($A \in \overline{\mathbb{R}}$) ako i samo ako je $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = A$ za svaki niz $\{x_n\}$ takav da je $\lim x_n = a$ i $x_n \in D \setminus \{a\}$ za svako n .*

Dokaz. Dokazaćemo teoremu za $a, A \in \mathbb{R}$. Slučajevi kada su a ili A beskonačni dokazuju se analogno.

Neka je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i neka je $\delta > 0$ takvo da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za svako $x \neq a$ u δ -okolini tačke a . Ako je $\{x_n\}$ proizvoljan niz realnih brojeva koji konvergira ka a , tada se skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ nalaze u δ -okolini tačke a , pa prema tome za skoro sve članove niza $\{f(x_n)\}$ važi da je $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. Ovim je dokazano da je $\lim f(x_n) = A$.

Obrnuto, neka je $\lim f(x_n) = A$ za svaki niz $\{x_n\}$ koji ispunjava navedene uslove. Pretpostavimo, suprotno od onoga što treba dokazati, da nije tačno da je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. Logičkom negacijom uslova iz definicije 3.1 dobijamo da za neko $\varepsilon > 0$ u svakoj δ -okolini tačke a postoji $x_\delta \neq a$ takvo da je $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$. Za takvo ε , uzmimo da je $\delta_n = 1/n$ i neka su x_n odgovarajuće tačke čije smo postojanje utvrdili. Tada je $\{x_n\}$ niz koji konvergira ka a , ali $\{f(x_n)\}$ ne konvergira ka A , što je kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle, mora biti $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$. \square

Teorema 3.2 može se uzeti i za *definiciju* granične vrednosti funkcije. To je tzv. HEINEOVA definicija. Ona se, pored drugih primena, koristi kod određivanja graničnih vrednosti nizova, što ćemo pokazati na primerima.

Primer 39. Neka je $y_n = n \sin \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Ako uvedemo oznake $f(x) = \sin x/x$ i $x_n = 1/n$, imamo da je $y_n = f(x_n)$. Kako je $\lim x_n = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, zaključujemo da je

$$\lim y_n = \lim f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Primer 40. Ako je funkcija f neprekidna u tački a i ako je $\lim x_n = a$, onda iz teoreme 3.2 proizilazi da je $\lim f(x_n) = f(a)$. Na primer, ako je $x_n = n^{1/n}$, imamo

da je

$$\lim \log x_n = \lim \frac{\log n}{n} = \lim (\log(n+1) - \log n) = \lim \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0,$$

gde smo koristili STOLZovu teoremu i neprekidnost funkcije $x \mapsto \log x$. Dalje, zbog neprekidnosti funkcije $x \mapsto e^x$ nalazimo da je

$$\lim x_n = \lim e^{\log x_n} = e^{\lim \log x_n} = e^0 = 1.$$

Uopšte, na sličan način mogu se odrediti granične vrednosti nizova tipa 1^∞ , ∞^0 ili 0^0 , po šemi

$$\lim x_n^{y_n} = e^{\lim y_n \log x_n}.$$

Ovu tehniku smo već koristili u zadacima iz nizova (zadatak 162 na strani 78 i zadaci iza njega).

Primer 41. Ako je $\lim x_n = a > 0$ i $\lim y_n = b$, dokazati da je $\lim x_n^{y_n} = a^b$.

Rešenje. S obzirom na neprekidnost logaritamske funkcije, imamo da je

$$\lim y_n \log x_n = b \log a,$$

pa je

$$\lim x_n^{y_n} = e^{\lim y_n \log x_n} = e^{b \log a} = a^b.$$

Isti rezultat važi i ako je $a = +\infty$ ili $b = \pm\infty$ (objasniti zašto).

Primer 42. U zadatku 203 na strani 89, dokazano je da je

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e,$$

za svaki niz $\{x_n\}$ takav da je $\lim x_n = \pm\infty$. Primenom teoreme 3.2, zaključujemo da je

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Uvođenjem smene $y = 1/x$, imamo da $y \rightarrow 0$ i (5) postaje

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

Jednakosti (5) i (6) koriste se u zadacima, a mogu se uzeti i za definiciju broja e .

Primer 43. Neka je niz $\{x_n\}$ definisan rekurentnom relacijom

$$(7) \quad x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

gde je f neprekidna funkcija. Ako je dati niz konvergentan, $\lim x_n = c \in \mathbb{R}$, tada iz rekurentne relacije, puštanjem da $n \rightarrow +\infty$, dobijamo da je $c = f(c)$. Iz toga izlazi da niz definisan sa (7) može biti konvergentan jedino ako funkcija f ima nepokretnu tačku (ili više njih), i tada je limes tog niza jednak jednoj od nepokretnih tačaka funkcije f .

Ako funkcija f nije neprekidna, ovakav zaključak ne može se izvesti. Na primer, neka je $f(x) = x^2$ za $x \neq 0$ i $f(0) = 1$; tada niz definisan sa (7), sa $x_1 = \frac{1}{2}$, konvergira ka nuli (videti i zadatak 224), a to nije nepokretna tačka funkcije f .

Primer 44. Svaka neprekidna funkcija određena je svojim vrednostima u racionalnim brojevima. Zaista, ako je funkcija f neprekidna u iracionalnoj tački a , onda je !

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n),$$

gde je $\{a_n\}$ proizvoljan niz racionalnih brojeva koji konvergira ka a i koji pripada domenu funkcije. \square

Zahvaljujući teoremi 3.2, mnoge osobine koje su u vezi sa konvergencijom funkcija mogu se dokazati preko odgovarajućih osobina nizova. Sve osobine navedene u teoremi 2.4 na strani 49, u teoremi 2.7 na strani 51 kao i u teoremi 2.9 na strani 53, važe u analognom obliku i za granične vrednosti funkcija. Ovde ih samo navodimo bez dokaza.

Teorema 3.3. \checkmark Ako je $f(x) = c \in \mathbb{R}$ za svako x u nekoj okolini tačke a , tada je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

\checkmark Neka je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ ($A, B \in \mathbb{R}$) i neka su α , β i γ proizvoljni realni brojevi. Tada važi:

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \gamma) = A + \gamma$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \text{ ako } B \neq 0 \text{ i } g(x) \neq 0.$$

\checkmark Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$, tada je

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \operatorname{sgn} A \cdot \infty \quad (A \neq 0), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

\checkmark Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ i ako je $f(x) > 0$ u nekoj okolini tačke a , tada je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

\checkmark Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > p (< p)$, tada postoji δ -okolina tačke a takva da je $f(x) > p (< p)$ za svako x u toj okolini.

\checkmark Ako postoji $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ i ako je $f(x) > p (< p)$ u nekoj okolini tačke a , onda je $A \geq p$.

I kod funkcija mogu da se definišu limes inferior i limes superior, slično kao kod nizova.

Limes inferior funkcije f kad $x \rightarrow a$ je najmanja granična vrednost niza $\{f(x_n)\}$ po svim nizovima $\{x_n\}$ koji konvergiraju ka a . Analogno, **limes superior** je najveća takva granična vrednost. Za ove granične vrednosti koristimo oznake

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \text{ ili } \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x), \quad \text{odnosno} \quad \limsup_{x \rightarrow a} f(x) \text{ ili } \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x).$$

Na primer, za funkciju $f(x) = \sin(1/x)$ imamo da je $\liminf_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ (na primer, preko niza $x_n = 1/(-\pi/2 + 2n\pi)$), dok je $\limsup_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ (preko niza $y_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$).

Za razliku od limesa, limes inferior i limes superior uvek postoje (ali ne moraju biti konačni). Važi sledeća teorema.

Teorema 3.4. *Funkcija f ima graničnu vrednost A kad $x \rightarrow a$ ako i samo ako je*

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

◇◇ strana 119, zadaci 231-302

3.2. Osobine neprekidnih funkcija

3.2.1. Teorema o međuvrednostima i metod polovljenja intervala

Ako je temperatura vazduha u 6 sati izjutra bila -1°C , a u 12 sati $+3^\circ\text{C}$, onda je sigurno postojao neki vremenski trenutak između 6 i 12 sati u kome je temperatura bila 0°C . To je izvesno zbog toga što je temperatura, kao i sve makrofizičke veličine, neprekidna funkcija vremena: ne može se menjati u skokovima. Da neprekidna funkcija na $[a, b]$ mora uzimati sve vrednosti između $f(a)$ i $f(b)$, postaje potpuno jasno ako se nacрта grafik. Ali, s obzirom da se u matematici mogu definisati i takve neprekidne funkcije čiji se grafik ne može nacrtati, ovu osobinu ćemo striktno formulisati i dokazati u sledećoj teoremi.

Teorema 3.5. *Neka je funkcija f definisana i neprekidna na segmentu $[a, b]$, $a < b$ i neka je $f(a)f(b) < 0$. Tada postoji tačka $c \in (a, b)$ takva da je $f(c) = 0$.*

Dokaz. • Dokaz je sličan dokazu BOLZANO-WEIERSTRASSOVOG stava i isto je zasnovan na teoremi o umetnutim intervalima.

• Neka je, na primer, $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$; stavimo $a_1 = a$ i $b_1 = b$. Neka je c_1 središnja tačka segmenta $[a, b]$.

• Ako je $f(c_1) = 0$, dokaz je završen (našli smo tačku u kojoj je vrednost funkcije jednaka nuli). U protivnom, ako je $f(c_1) > 0$ stavimo $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$, a ako je $f(c_1) < 0$, stavimo $a_2 = c_1$ i $b_2 = b_1$.

• Ponavljanjem ovog postupka dobijamo ili neku tačku c_n u kojoj je $f(c_n) = 0$ ili beskonačan niz intervala $[a_n, b_n]$ sa $f(a_n) < 0$ i $f(b_n) > 0$. Pretpostavimo da smo dobili niz ovakvih intervala, pošto u prvom slučaju nemamo šta dalje da dokazujemo. Jednostavno se pokazuje da $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ čine familiju umetnutih intervala, pa postoji tačka c koja je zajednička svim intervalima i takva da je

$$\lim a_n = \lim b_n = c.$$

• Kako je $f(a_n) < 0$ za svako n , onda je $f(c) = \lim f(a_n) \leq 0$; na isti način je $f(c) = \lim f(b_n) \geq 0$, odakle izlazi da je $f(c) = 0$ i dokaz je završen. □

Postupak primenjen u dokazu teoreme 3.5 može se primeniti i za približno određivanje tačke c , što se koristi pri numeričkom rešavanju jednačina.

Primer 45. Metod polovljenja intervala. Pretpostavimo da treba rešiti jednačinu $f(x) = 0$, gde je f neprekidna funkcija. Izračunavanjem $f(x)$ za razne vrednosti x ili skiciranjem grafika funkcije f , možemo da pronađemo tačke a i b ($a < b$) u kojima funkcija uzima vrednosti različitog znaka. Konstruišimo niz intervala (a_n, b_n) kao u dokazu teoreme 3.5; neka je $\{c_n\}$ niz njihovih središnjih tačaka. Kako je $\lim a_n = \lim b_n = c$, gde je $f(c) = 0$, primenom teoreme o dva žandara zaključujemo da je i $\lim c_n = c$. Prema tome, za dovoljno veliko n_0 , možemo uzeti da je $c_{n_0} \approx c$, tj. da je c_{n_0} približno rešenje date jednačine. Kao kriterijum za izbor n_0 može poslužiti širina intervala (a_n, b_n) ; ako je ona manja od 2ε , onda je približno rešenje nađeno sa greškom koja je sigurno manja od ε .

Kao konkretan primer rešićemo jednačinu $e^{-x} - x = 0$ sa greškom manjom od 0.05. Ako je $f(x) = e^{-x} - x$, imamo da je $f(0) > 0, f(1) < 0$, pa se za početni interval može uzeti $[0, 1]$. Izračunavanjem dobijamo $f(0.5) > 0$, tako da je sledeći interval $[0.5, 1]$. Ponavljanjem postupka dobijamo niz intervala u kojima funkcija f uzima vrednosti različitog znaka:

$$[0, 1], [0.5, 1], [0.5, 0.75], [0.5, 0.625], [0.5625, 0.625] .$$

Kako je dužina poslednjeg intervala manja od 0.1, uzimamo da je njegova središnja tačka 0.59375 približno rešenje date jednačine sa tačnošću do 0.05.

Opisani metod je jednostavan i ne zahteva nikakve posebne programske procedure. Nedostatak metoda polovljenja intervala je relativno spora konvergencija niza $\{c_n\}$ u odnosu na neke druge metode približnog rešavanja jednačina. \square

Kao neposredna posledica teoreme 3.5 dobija se sledeće tvrđenje.

Teorema 3.6. *Neka je funkcija f definisana i neprekidna na segmentu $[a, b]$ ($a < b$) i neka je $f(a) \neq f(b)$. Tada za svaki realan broj y između $f(a)$ i $f(b)$ postoji neko $x \in (a, b)$ tako da je $y = f(x)$. Drugim rečima, neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ dostiže sve međuvrednosti između $f(a)$ i $f(b)$.*

Dokaz. Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, pri čemu je $f(a) \neq f(b)$. Za proizvoljno fiksirano y između $f(a)$ i $f(b)$ definišimo $F(x) = f(x) - y$. Funkcija F je neprekidna na $[a, b]$ i $F(a)F(b) < 0$, pa na osnovu teoreme 3.5, postoji $x \in (a, b)$ za koje je $F(x) = 0$, odnosno $f(x) = y$. \square

Sledeća osobina neprekidnih funkcija vezana je za egzistenciju inverzne funkcije.

Teorema 3.7. *Neka je funkcija f monotonno rastuća i neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada funkcija f ima inverznu funkciju f^{-1} koja preslikava segment $[f(a), f(b)]$ na segment $[a, b]$. Funkcija f^{-1} je neprekidna i monotonno rastuća.*

Analogno tvrđenje važi za slučaj kada je f monotonno opadajuća i neprekidna, kao i kada je interval beskonačan, tj. oblika $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$ ili $(-\infty, +\infty)$.

Dokaz. • Neka je f monotonno rastuća i neprekidna funkcija na $[a, b]$.

• Prema teoremi 3.6, za svako $y \in [f(a), f(b)]$ postoji neko $x \in [a, b]$ tako da je $f(x) = y$. To znači da je $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.

• Neka su x_1 i x_2 različiti brojevi iz $[a, b]$, na primer $x_1 < x_2$. Zbog monotonosti funkcije f imamo da su i slike različite: $f(x_1) < f(x_2)$.