

Matematička analiza
teorija i hiljadu zadataka
za studente tehnike

Predgovor

U Bolonji su studenti angažovali i otpuštali profesore, kažnjavali ih zbog neopravdanih izostanaka ili kašnjenja na predavanja, kao i zato što nisu umeli da odgovore na teška pitanja. Ako bi predavanje bili nezanimljivo, presporo, prebrzo ili naprosto nedovoljno glasno, studenti bi se izrugivali i gađali profesore raznim predmetima.¹

Ova knjiga je nastala kao sinteza, sažimanje i prerada moje dve prethodne knjige: *Matematička analiza - pregled teorije i zadaci*, čije prvo izdanje je izašlo 1994. godine, i *Matematička analiza - teorija*, iz 1996. godine. U toku vremena, duh *Bolonjske deklaracije*, kao i razne druge okolnosti, učinile su da te knjige postanu manje privlačne i previše teške za studente Elektrotehničkog fakulteta, kojima su prvenstveno i bile namenjene.

Ovaj udžbenik objedinjuje teoriju i zadatke, što je standard u savremenoj svet-skoj udžbeničkoj literaturi. Udžbenik je napisan za studente prve godine tehničkih fakulteta, a odnosi se na klasičnu matematičku analizu funkcija jedne promenljive, sa elementima diferencijalnih jednačina.

Na oko 500 stranica, korisnik ove knjige naći će 173 detaljno urađena primera i 1008 zadataka, od kojih je većina snabdevena detaljnim rešenjima ili rezultatima. U teorijskom delu, skoro sve teoreme su date sa dokazima, a na predavaču je da odabere teoreme koje će predavati sa dokazima, i one čije će dokaze izostaviti.

Oznake na marginama, koje sam uveo u svojoj prvoj knjizi iz 1994. godine, zadržao sam i u ovom udžbeniku. Nadam se da će to, uz ostale osobenosti teksta koji sledi, doprineti lakšem, bržem i uspešnijem savlađivanju materije.

Kao ni bilo koji matematički tekst, ni ovaj nije imun na greške. Iako sam u radnoj verziji teksta odstranio mnogobrojne nedostatke, nedoslednosti i notorne greške, u čemu mi je pomogao i dr Nenad Cakić, siguran sam da je dosta toga ostalo za eventualno sledeće izdanje; sa zahvalnošću ću primiti sve eventualne primedbe.

Zahvaljujem se mr Đorđu Baljuzoviću, dr Draganu Cvetkoviću i Koviljki Mladenović, na pomoći oko obrade 60 slika u knjizi.

U Beogradu, 19. septembra 2005. godine

Milan Merkle
emerkle@kondor.etf.bg.ac.yu

¹Iz knjige Leonarda Mlodinova *Euklidov prozor*, u prevodu Zorana Živkovića, izdavač Laguna, 2005.

Sadržaj

Oznake	x
1 Uvod u analizu	1
1.1 Kardinalni broj skupa	2
1.2 Realni brojevi i nejednakosti	4
Poredak u skupu realnih brojeva (4) Neke nejednakosti (6)	
1.3 Kompleksni brojevi	9
1.4 Realne funkcije	10
Pregled osnovnih pojmova (10) Stepena funkcija (12) Polinomska i racionalna funkcija (13) Eksponencijalna i logaritamska funkcija (16) Trigonometrijske funkcije (18) Elementarne funkcije (22)	
1.5 Zadaci	25
Kardinalni broj (25) Poredak u skupu realnih brojeva (25) Nejednakosti (27) Osobine realnih funkcija (28) Kompleksni brojevi i trigonometrijske funkcije (33) Eksponencijalna i logaritamska funkcija (40)	
2 Nizovi i skupovi realnih brojeva	43
2.1 Realni nizovi	44
Definicija i osnovni pojmovi (44) Osobine konvergentnih nizova (48) Beskonačne granične vrednosti (51) Dve teoreme o nizovima (54) Monotoni nizovi (55)	
2.2 Tri (na prvi pogled) teorijske teme	58
Umetnuti intervali (58) Podnizovi (59) Granične vrednosti podnizova (61) Cauchyjev kriterijum konvergencije nizova (62)	
2.3 Osobine skupova realnih brojeva	64
Otvoreni, zatvoreni i kompaktni skupovi (64) Banachov stav i metod iteracije (66)	
2.4 Zadaci	71
Definicija i osnovni pojmovi (71) Osobine konvergentnih nizova (73) Beskonačne granične vrednosti i neodređenosti (74) Monotoni nizovi (82) Umetnuti intervali (87) Podnizovi (88) Cauchyjev kriterijum (90) Otvoreni, zatvoreni i kompaktni skupovi (92) Banachov stav i metod iteracije (93)	
3 Funkcije: granične vrednosti i neprekidnost	97
3.1 Granične vrednosti funkcija	98

Definicija i osnovne osobine (98) Veza između graničnih vrednosti nizova i funkcija (105)	
3.2 Osobine neprekidnih funkcija	108
Teorema o međuvrednostima i metod polovljenja intervala (108) Neprekidne funkcije na kompaktnim skupovima. Uniformna neprekidnost (110)	
3.3 Brzina konvergencije i beskonačno male veličine	113
3.4 Zadaci	119
Granične vrednosti funkcija (119) Osobine neprekidnih funkcija (130) Brzina konvergencije i beskonačno male veličine (133)	
4 Diferencijalni račun	137
4.1 Izvod funkcije realne promenljive	138
Problem tangente i definicija izvoda (138) Formalizam diferenciranja (142) Diferencijal (146)	
4.2 Teoreme o srednjoj vrednosti u diferencijalnom računu	150
4.3 Primene teorema o srednjoj vrednosti	154
Monotonost funkcija (154) Prekidi izvoda (156) Uniformna neprekidnost funkcija (157) Kontrakcija i Lagrangeova teorema (158) L'Hospitalovo pravilo (159)	
4.4 Izvodi i diferencijali višeg reda	160
Izvodi višeg reda (160) Diferencijali višeg reda (162) Konveksnost i drugi izvod (163)	
4.5 Taylorova formula	167
Taylorov polinom i ostatak (167) Nalaženje Taylorovih razvoja funkcija (169) Procena ostatka u Taylorovoj formuli (173)	
4.6 Ispitivanje funkcija	179
Određivanje karaktera stacionarnih tačaka (179) Asimptote (181) Postupak ispitivanja funkcija (183)	
4.7 Zadaci	187
Formalizam diferenciranja (187) Veza između neprekidnosti i diferencijabilnosti. Levi i desni izvodi (192) Tangenta i normala (194) Diferencijal (195) Teoreme o srednjoj vrednosti (198) Monotonost funkcija (200) Prekidi izvoda (203) Uniformna neprekidnost funkcija (204) Kontrakcija i Lagrangeova teorema (204) L'Hospitalovo pravilo (206) Izvodi višeg reda (209) Diferencijali višeg reda (212) Konveksnost (214) Taylorovi i MacLaurinovi razvoji (215) Procena ostatka (218) Teorema o jedinstvenosti i potencijalni razvoji (222) Taylorova formula za polinome (230) Određivanje karaktera stacionarnih tačaka (231) Asimptote (231) Ispitivanje funkcija (232) Analitičke osobine polinoma (257)	
5 Integralni račun	263
5.1 Problem izračunavanja površine i definicija integrala ...	264
5.2 Određeni integral	268
Integrabilne funkcije (268) Osobine integrala (270)	
5.3 Primitivna funkcija i neodređeni integral	273
Definicija primitivne funkcije (273) Veza između određenog i neodređenog	

	integrala (274) Osobine neodređenog integrala i metodi integracije (275)	
	Metodi integracije određenog integrala (278)	
5.4	Nesvojstveni integral	280
5.5	Integracija nekih klasa funkcija	283
	Racionalne funkcije (284) Neke „iracionalne“ funkcije (285) Trigonometrijske funkcije (286) Integrali koji nisu elementarne funkcije (287)	
5.6	Dužina luka krive i ostale primene	289
	Dužina luka krive (289) Ostale primene (291)	
5.7	Zadaci	295
	Definicija određenog integrala (295) Primitivna funkcija i neodređeni integral (296) Smena promenljive u neodređenom integralu (299) Transformacije podintegralne funkcije (302) Parcijalna integracija (306) Integrali racionalnih funkcija (308) Integrali nekih „iracionalnih“ funkcija (314) Integrali trigonometrijskih funkcija (316) Integracija određenih integrala (322) Nesvojstveni integrali (332) Primene određenog integrala (336)	
6	Redovi	343
5.1	Uvod i osnovni pojmovi	344
6.2	Pozitivni redovi	349
6.3	Redovi sa članovima proizvoljnog znaka	357
	Alternativni redovi (357) Redovi sa opštim članom oblika $a_n b_n$ (358) Apsolutna konvergencija (360)	
6.4	Funkcionalni redovi	363
	Uvod (363) Uniformna konvergencija nizova funkcija (363) Uniformna konvergencija redova (368)	
6.5	Stepeni redovi	370
	Definicija i osobine stepenih redova (371) Maclaurinovi redovi (376)	
6.6	Zadaci	381
	Osnovni pojmovi (381) Pozitivni redovi (384) Redovi sa članovima proizvoljnog znaka (389) Apsolutna konvergencija (392) Uniformna konvergencija nizova funkcija (394) Uniformna konvergencija redova (396) Stepenni redovi (399) MacLaurinovi redovi (401)	
7	Diferencijalne jednačine	411
7.1	Uvodni pojmovi i diferencijalne jednačine prvog reda ...	412
	Uvodni pojmovi (412) Jednačina koja razdvaja promenljive (414) Homogena jednačina (416) Linearna jednačina prvog reda (418) Bernoullijeva jednačina (419) Jednačine Lagrangea i Clairauta (420) Riccatijeva jednačina (422) Jednačina u totalnom diferencijalu (423)	
7.2	Linearne diferencijalne jednačine višeg reda	428
	Homogena jednačina (428) Nehomogena jednačina (433) Jednačina sa konstantnim koeficijentima (436) Eulerova diferencijalna jednačina (440)	
7.3	Nepotpune jednačine	440
7.4	Zadaci	443
	Uvodni pojmovi (443) Diferencijalne jednačine prvog reda (443) Linearne diferencijalne jednačine višeg reda (456)	

8 Razni zadaci	467
8.1 Nizovi	468
8.2 Funkcije, izvodi i integrali	471
8.3 Redovi	479
Brojni redovi (479) Stepeni redovi (480)	
8.4 Diferencijalne jednačine	482
Diferencijalne jednačine prvog reda (482) Diferencijalne jednačine višeg reda (482)	
8.5 Mešoviti zadaci	487
Registar imena	493
Registar pojmova	495

Oznake

- ! Važno (na margini). Označava važne formule i tvrđenja.
- ! Klizavo (na margini). Ovim znakom obeležavaju se mesta gde se lako i često greši.
- ♣ Ideja (na margini). Ovim znakom obeležavamo mesta na kojima se uvodi nova ideja.
- Znak za kraj dokaza, teoreme, definicije ili primera.
- \mathbb{N} Skup prirodnih brojeva.
- \mathbb{Q} Skup racionalnih brojeva.
- \mathbb{Z} Skup celih brojeva.
- \mathbb{R} Skup realnih brojeva.
- \mathbb{C} Skup kompleksnih brojeva.
- \emptyset Prazan skup.
- $\{x \mid P(x)\}$ Skup svih x (iz nekog skupa) koji imaju osobinu P . Na primer, $\{x \mid 1 < x < 2\}$ je skup svih brojeva između 1 i 2.
- (a, b) Interval (otvoreni interval), skup $\{x \mid a < x < b\}$.
- $[a, b]$ Segment (zatvoreni interval), skup $\{x \mid a \leq x \leq b\}$.
- $(a, b]$ Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup $\{x \mid a < x \leq b\}$.
- $[a, b)$ Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup $\{x \mid a \leq x < b\}$.
- $x \mapsto f(x)$ Oznaka za funkciju koja x preslikava u $f(x)$, na primer, funkcija $x \mapsto \sin x$.
- $[x]$ Ceo deo broja x . Na primer, $[3.67] = 3$, $[-8.01] = -9$. Simbol $[\dots]$ u tekstu označava samo ovu funkciju i ne koristi se u značenju zagrada.
- $\operatorname{sgn} x$ Znak broja x , signum. Ako je $x > 0$, tada je $\operatorname{sgn} x = 1$, za $x < 0$ je $\operatorname{sgn} x = -1$ i $\operatorname{sgn} 0 = 0$.
- NZS (m, n) Najmanji zajednički sadržalac prirodnih brojeva m i n .
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.
- $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$.
- $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$.
- $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}$.

Ostale matematičke oznake objašnjene su na mestu gde se po prvi put pojavljuju.