

Primer 29. Tačke nagomilavanja skupa \mathbb{Q} racionalnih brojeva su svi realni brojevi i $\pm\infty$. Naime, svaki racionalan broj p/q može se pretstaviti je granična vrednost nekog niza racionalnih brojeva, na primer, niza $r_n = \frac{np+1}{nq}$. Ako broj x nije racionalan, on se može pretstaviti kao limes svoje decimalne reprezentacije. Konačno, $\lim n = +\infty$ i $\lim(-n) = -\infty$, tako da su i $\pm\infty$ takođe tačke nagomilavanja skupa \mathbb{Q} .

Teorema 2.24. *Svaki zatvoren skup S sadrži sve svoje konačne tačke nagomilavanja, ako ih ima.*

Dokaz. Neka je S zatvoren skup i neka je $a \in \mathbb{R}$ njegova tačka nagomilavanja. Prema teoremi 2.23, postoji niz $x_n \in S$, takav da je $\lim x_n = a$. Kako je $a \in \mathbb{R}$, niz $\{x_n\}$ je konvergentan; prema teoremi 2.21, mora biti $a \in S$.

◇◇ strana 96, zadaci 224-231

2.4.2. Banachov stav i metod iteracije

Pretpostavimo da nas interesuje rešenje jednačine $\sin x - x + 1 = 0$. Primenimo jedan jednostavan i popularan metod za rešavanje jednačina, tzv. **metod iteracija**. Napišimo jednačinu u obliku $x = f(x)$, gde je $f(x) = \sin x + 1$. Skiciranjem grafika vidimo da se rešenje jednačine nalazi u intervalu $(0, \pi)$. Uzmimo da je $x_1 = \pi/2$ i izračunajmo $x_2 = f(x_1) = 2$, $x_3 = f(x_2) = 1.909$, itd., po pravilu $x_{n+1} = f(x_n)$. Tako dobijamo niz (izračunato na 3 decimale):

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = 2, x_3 = 1.909, x_4 = 1.943, \dots, x_7 = 1.934, x_8 = 1.935, x_9 = 1.935.$$

Kako je $x_8 = x_9 = 1.935$, to znači da je (na tri decimale) $1.935 = f(1.935)$, pa je $x = 1.935$ rešenje postavljene jednačine sa tačnošću do tri decimalna mesta.

Sa običnim džepnim kalkulatorom ovako se mogu rešavati i veoma komplikovane jednačine. U stvari, svaka jednačina može se, pogodnim transformacijama, napisati u obliku $x = f(x)$. Svako rešenje jednačine $x = f(x)$ nazivamo **nepokretnom (ili fiksnom) tačkom** funkcije f .

Međutim, metod iteracije ne funkcioniše uvek tako dobro kao u navedenom primeru.

Posmatrajmo jednačinu $x^3 - x - 1 = 0$ i napišimo je u obliku $x = x^3 - 1$. Skiciranjem grafika, vidimo da prava $y = x$ i kriva $y = x^3 - 1$ imaju jednu presečnu tačku $x > 0$. Metod iteracije, ako se počne od tačke $x_1 = 1$, daje niz

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = -2, x_5 = -9, x_6 = -730, \dots$$

za koji je očigledno da ne može da konvergira ka rešenju. Međutim, ako se jednačina napiše u obliku $x = \sqrt[3]{x+1}$, dobija se niz

$$x_1 = 1, x_2 = 1.260, x_3 = 1.312, x_4 = 1.322, x_5 = 1.324, x_6 = 1.324,$$

pa zaključujemo da je $x = 1.324$ približno rešenje jednačine¹.

¹Ovaj zaključak nije strogo matematički zasnovan, jer se u principu može dogoditi da u narednim iteracijama razlika $x - f(x)$ postane veća. Međutim, u primenama se ta mogućnost zanemaruje i smatra se da je ovim postupkom zaista pronađeno rešenje.

BANACHov stav, koji ćemo sada izložiti, daje dovoljne uslove za konvergenciju iteracionog niza. Uvedimo najpre jedan novi pojam.

Definicija 2.15. Za funkciju f kažemo da je **kontrakcija** skupa S ako

- f preslikava skup $S \subset \mathbb{R}$ u taj isti skup, tj. $f(S) \subset S$ i ako
- postoji realan broj q , $0 < q < 1$, takav da za svako $x, y \in S$ važi nejednakost

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|.$$

Teorema 2.25. Banachov stav o nepokretnoj tački. Neka je $S \subset \mathbb{R}$ zatvoren skup i neka je f kontrakcija skupa S . Tada

- ✓ funkcija f ima jedinstvenu nepokretnu tačku $s \in S$;
- ✓ nepokretna tačka s je granična vrednost niza definisanog sa

$$(1) \quad x_1 \in S, \quad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

gde se početna tačka x_1 može izabrati proizvoljno u skupu S ;

- ✓ važi nejednakost

$$(2) \quad |x_n - s| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q} |x_2 - x_1|, \quad n = 2, 3, \dots$$

Dokaz. • Dokazaćemo najpre da je niz (1) CAUCHYjev niz. Kako je f kontrakcija, imamo da je

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}|.$$

Odavde zaključujemo (indukcijom) da je

$$(3) \quad |x_{n+1} - x_n| \leq q^{n-1} |x_2 - x_1|, \quad n = 2, 3, \dots$$

Iz (3), primenom nejednakosti trougla, dobijamo za $n \geq 2$ i proizvoljno $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_{n+k} - x_n| &\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n+1}| + \dots + |x_{n+k} - x_{n+k-1}| \\ &\leq (q^{n-1} + q^n + \dots + q^{n+k-2}) |x_2 - x_1| \\ &= q^{n-1} (1 + q + \dots + q^{k-1}) |x_2 - x_1| \\ (4) \quad &= q^{n-1} \frac{1 - q^k}{1 - q} |x_2 - x_1| \leq \frac{q^{n-1}}{1 - q} |x_2 - x_1| \rightarrow 0 \quad \text{kad } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Odavde zaključujemo (primenom teoreme 2.18 na strani 65) da je $\{x_n\}$ CAUCHYjev niz.

• Iz činjenice da je niz $\{x_n\}$ CAUCHYjev, zaključujemo da postoji $s = \lim x_n$; kako je S zatvoren skup, imamo da $s \in S$.

• Da bismo dokazali da je s nepokretna tačka preslikavanja f , primetimo da je



$$\begin{aligned} 0 \leq |s - f(s)| &\leq |s - x_n| + |x_n - f(s)| = |s - x_n| + |f(x_{n-1}) - f(s)| \\ (5) \quad &\leq |s - x_n| + q|x_{n-1} - s| \rightarrow 0 \quad \text{kad } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Kako $|s - f(s)|$ ne zavisi od n , nejednakost (5) je moguća samo ako je $|s - f(s)| = 0$, odnosno $s = f(s)$.

- Dokažimo sada da je s jedina nepokretna tačka preslikavanja f . Neka je $t \in S$ takođe nepokretna tačka. Tada je

$$|s - t| = |f(s) - f(t)| \leq q|s - t|,$$

što znači da je ili $|s - t| \neq 0$ i $q \geq 1$ ili da je $|s - t| = 0$. Kako je, po pretpostavci, $q < 1$, imamo da je $s - t = 0$, tj. $s = t$.

- Konačno, nejednakost (2) se može dobiti ako se, za fiksirano n u nejednakosti (4) pusti da $k \rightarrow +\infty$. Tada $|x_{n+k} - x_n| \rightarrow |s - x_n|$ i nejednakost (2) je dokazana.

Primer 30. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ preslikava interval $S = [0, +\infty)$ u sebe, tačnije, $f(S) = [1, +\infty) \subset S$. Skup S je zatvoren podskup skupa \mathbb{R} . Kako je, za $x, y \in S$,

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x - y|}{(x+1)^{2/3} + (x+1)^{1/3}(y+1)^{1/3} + (y+1)^{2/3}} \leq \frac{1}{3}|x - y|,$$

funkcija f je kontrakcija skupa S . Prema tome, uslovi BANACHOVOG stava su ispunjeni i jednačina $x = f(x)$, odnosno $x^3 - x - 1 = 0$ ima rešenje koje se dobija kao granična vrednost iteracionog niza, kao što smo to pokazali na početku ovog dela.

Ako se jednačina $x^3 - x - 1 = 0$ napiše u obliku $x = x^3 - 1$, videli smo da iteracioni niz ne konvergira. Objasnimo to sa gledišta BANACHOVOG stava. Neka je $g(x) = x^3 - 1$. Kada bi funkcija g bila kontrakcija nekog skupa S nenegativnih brojeva, onda bi, za neko $q < 1$ važila nejednakost

$$|g(x) - g(y)| = |x^3 - y^3| = |x - y|(x^2 + xy + y^2) \leq q|x - y| \quad \text{za svako } x, y \in S,$$

odakle bi moralo biti $x^2 + xy + y^2 \leq q < 1$. Ako su x i y veći od 1, ovo je nemoguće; s druge strane, nepokretna tačka funkcije g je ista kao i nepokretna tačka funkcije f (jer se dobija kao rešenje iste jednačine), a to je, kao što smo videli, približno $1.324 > 1$. Odavde vidimo da g nije kontrakcija i to je razlog zašto iteracioni niz ne konvergira.

Primer 31. Pomoću nejednakosti (2) može se proceniti greška aproksimacije u svakom koraku iteracije. U primeru 30 za funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ našli smo da je $q = 1/3$. Prema nejednakosti (2), imamo da je

$$|x_n - s| \leq \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} |x_1 - x_2|.$$

Ako za početnu tačku uzmemo $x_1 = 1$, onda je $x_2 = 1.26$ i dobijamo da je $|x_n - s| \leq 0.63/3^{n-2}$. Iz ove nejednakosti može se unapred odrediti maksimalan broj iteracija n koji je potreban da bi se dostigla zadata tačnost. \square

Naglasimo da su uslovi navedeni u BANACHOVOM stavu samo dovoljni; iteracioni niz može da konvergira iako oni nisu ispunjeni.

BANACHOV stav može se koristiti i za dokazivanje konvergencije niza, kao i za nalaženje granične vrednosti ako nepokretnu tačku možemo naći na drugi način. Izložićemo ideju na sledećem primeru.

Primer 32. Posmatrajmo niz definisan sa

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{1 + \sqrt{x_n}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ovo je očigledno iteracioni niz za rešavanje jednačine $x = f(x)$, gde je $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$. Konvergenciju datog niza možemo utvrditi ako dokažemo da je f kontrakcija nekog zatvorenog skupa koji sadrži tačku $1/3$. Kako je $f(x) < 1$ za svako x , prirodna ideja je da se ispita da li je f kontrakcija na skupu $S = [1/3, 1]$. Ako uočimo da je $f(x) = 1 - \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$, vidimo da je f rastuća funkcija, pa je, za $x > 1/3$,

$$f(x) > f(1/3) = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} > \frac{1}{3},$$

što zajedno sa već uočenom nejednakošću $f(x) < 1$ daje $f([1/3, 1]) \subset [1/3, 1]$.

Dalje je

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{y})} = \frac{|x - y|}{(1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}.$$

Kako je, za $x, y \in S$, $1 + \sqrt{x} > 1$, $1 + \sqrt{y} > 1$ i $\sqrt{x} + \sqrt{y} > 2/\sqrt{3}$, imamo da je

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\sqrt{3}}{2}|x - y|,$$

pa je f kontrakcija skupa S . Dakle, dati niz je konvergentan na skupu S . Njegova granična vrednost je jedinstveno rešenje jednačine $x = f(x)$, koja se u našem slučaju lako rešava (smenom $t = \sqrt{x}$) i dobija se da je $x = (3 - \sqrt{5})/2$.

2.5. Zadaci

2.5.1. Prebrojivi i neprebrojivi skupovi (teorija na stranama 44-46)

102. Zamislamo da imamo beskonačno mnogo kuglica numerisanih brojevima $1, 2, 3, \dots$ i jednu praznu kutiju.

a) U 1 minut do 12 sati uzimamo kuglice sa brojevima $1 - 10$, stavljamo ih u kutiju, a iz kutije izvlačimo kuglicu broj 10. U $1/2$ minuta do 12 stavljamo u kutiju kuglice $11 - 20$, a izvlačimo kuglicu 20. U $1/4$ minuta do 12, stavljamo kuglice $21 - 30$ i izvlačimo kuglicu 30. Postupak nastavljamo do 12 sati (pretpostavljamo da je stavljanje i izvlačenje kuglica trenutno). Koliko će kuglica biti u kutiji u 12 sati?

b) Ponovimo eksperiment sa malom izmenom: U 1 minut do 12 stavljamo kuglice $1 - 10$, a izvlačimo kuglicu 1. U $1/2$ minuta do 12 stavljamo kuglice $11 - 20$, a izvlačimo kuglicu 2. U $1/4$ minuta do 12 stavljamo kuglice $21 - 30$, a izvlačimo kuglicu 3. Koliko će sada biti kuglica u kutiji u 12 sati?

[**a)** Beskonačno mnogo. **b)** Nijedna.]

103*. Neka je A skup sa beskonačno mnogo elemenata i neka je $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, gde je $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da je $\text{card } A \cup B = \text{card } A$.

Rešenje. Očigledno je dovoljno dati dokaz za $n = 1$, jer se do proizvoljnog $n \in \mathbb{N}$ tada dolazi indukcijom (dodavanjem po jednog elementa u skup A). Neka je A dati skup sa beskonačno mnogo elemenata i neka je $B = \{b\}$. Neka je $x_1, x_2, \dots, x_k \dots$ proizvoljan niz elemenata skupa A . Definišimo preslikavanje f skupa $A \cup B$ u skup A pomoću

$$f(b) = x_1, \quad f(x_k) = x_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad f(x) = x \quad (x \neq x_1, x_2, \dots)$$

Funkcija f je očigledno bijekcija, pa je $\text{card } A \cup B = \text{card } A$.

104*. Neka je A skup sa beskonačno mnogo elemenata i neka je B prebrojiv skup. Dokazati da je tada $\text{card } A \cup B = \text{card } A$.

105*. Dokazati da svaki interval (konačan ili beskonačan, otvoren ili zatvoren) ima kardinalni broj c .

Rešenje. Dovoljno je pokazati da postoji bijekcija između proizvoljnog intervala i skupa \mathbb{R} . Takva bijekcija, u slučaju konačnog intervala $[a, b]$ ili (a, b) je, na primer,

$$f(x) = \frac{b-a}{\pi} \left(\arctg x + \frac{\pi}{2} \right) + a.$$

(do ove funkcije smo došli polazeći od funkcije $x \mapsto \arctg x$, koja preslikava skup \mathbb{R} u $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

106*. Dokazati da skup realnih brojeva ima veći kardinalni broj od skupa prirodnih brojeva, tj. $c > \aleph_0$.

Rešenje. Na osnovu zadatka 105, dovoljno je pokazati da skup tačaka intervala $(0, 1)$ ima kardinalni broj veći od \aleph_0 , tj. da se ne može urediti u niz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji niz a_1, a_2, \dots čiji su elementi svi realni brojevi iz $(0, 1)$. Ovi brojevi se mogu predstaviti u decimalnom zapisu:

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots, \quad a_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots, \quad \dots, \quad a_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots, \quad \dots$$

gde su a_{ij} decimalne cifre. Pri tome u slučajevima kada realan broj ima dve decimalne reprezentacije (kao na primer $0.3199\dots$ i $0.32000\dots$) biramo zapis sa beskonačno mnogo nula. Konstruišimo sada realan broj x po sledećem pravilu: Za njegovu prvu cifru iza decimalnog zareza uzimamo bilo koju cifru različitu od a_{11} , za drugu cifru uzimamo bilo koju različitu od a_{22} itd. Očigledno je da se broj x može tako konstruisati da ne sadrži beskonačno mnogo devetki u decimalnom zapisu, pa bi se on morao nalaziti na nekom mestu u nizu $\{a_n\}$. S druge strane, kako se x razlikuje od n -tog člana niza $\{a_n\}$ u n -toj decimalnoj cifri, onda niz $\{a_n\}$ ne sadrži x , što je kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle, nemoguće je da postoji niz koji sadrži sve realne brojeve u intervalu $(0, 1)$.

107*. Dokazati da skup svih nizova čiji elementi pripadaju skupu $\{0, 1\}$ ima kardinalni broj c .

Rešenje. Svaki realan broj x iz intervala $(0, 1)$ može se predstaviti u binarnom zapisu:

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots, \quad a_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots$$

Za svako $x \in (0, 1)$ postoji, prema tome, jedan niz a_1, a_2, \dots koji je sastavljen od nula i jedinica i obrnuto, svakom takvom nizu odgovara jedan realan broj $x \in [0, 1]$. Ova je jedinstven za svako x , sem u prebrojivo mnogo slučajeva u kojima jednom broju x odgovaraju dva niza. (Na primer, broju $1/2$ odgovaraju nizovi $1, 0, 0, \dots$ i $0, 1, 1, \dots$). Na osnovu zadatka 104, skup svih nizova nula i jedinica i skup $(0, 1)$ imaju isti kardinalni broj, a to je c .

2.5.2. Definicija niza i osnovni pojmovi (teorija na stranama 46-50)

108. Dat je niz $x_n = 2n + 3$. **a)** Napisati prva tri člana niza x_{n+5} . **b)** Kako glasi formula kojom se definiše niz x_{n+k} , za dato $k > 0$?

109. Ako je niz $\{x_n\}$ zadat rekurentnom formulom

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2x_n,$$

izraziti x_n eksplicitno preko n . Zatim naći x_{100} .

Rešenje. Primenom date rekurentne formule, nalazimo da je

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 8, \dots$$

odakle se indukcijom lako dobija da je $x_n = 2^{n-1}$. Odavde je $x_{100} = 2^{99}$.

110. Predstaviti niz prirodnih brojeva pomoću rekurentne formule.

$$[x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 1, \quad n = 1, 2, \dots]$$

111. Predstaviti u obliku rekurentne formule (sa $n \geq 1$) nizove **a)** $x_n = 2n + 1$; **b)** $x_n = 3^n$.

112. Kamatna stopa od 7% godišnje sa mesečnim kamaćenjem znači da se na svaki iznos x koji imamo na računu krajem meseca dodaje iznos $\frac{0.07}{12}x$. Ako smo uložili iznos x_0 dana 1. aprila 2005. godine, izračunati koliko novca ćemo imati na računu dana 30. novembra 2008. godine, pretpostavljajući da u međuvremenu nismo podizali ulog?

Rešenje. Prema datim uslovima, ako na početku meseca imamo iznos x na računu, na kraju tog meseca imaćemo iznos od $x \cdot (1 + q)$, gde je $q = \frac{0.07}{12}$. Prema tome, ako smo na početku uložili x_0 , na kraju tog meseca imaćemo $x_0(1 + q)$, na kraju drugog meseca imaćemo $x_0(1 + q)^2$, itd. Dakle, po isteku n meseci, na našem računu biće suma $x_n = x_0(1 + q)^n$. U zadatku se traži x_{44} . Brojna vrednost je $x_0(1 + q)^{44} \approx 1.292x_0$.

113. Telekomunikacioni signal od izvora prolazi kroz niz segmenata. Duž svakog segmenta izgubi 10% od snage koju je imao na početku segmenta. Na kraju svakog trećeg segmenta nalazi se pojačavač koji pojačava snagu signala za 30%. Ako je poslat signal snage s , naći formulu za snagu na kraju n -tog segmenta i izračunati njegovu snagu na kraju dvadesetog i na kraju stotog segmenta.

Rešenje. Neka je $q = 0.9$ faktor slabljenja i $r = 1.3$ faktor pojačanja, kao što je dato u zadatku. Označimo sa x_n snagu signala na kraju n -tog segmenta (posle prolaska kroz pojačivač, ako postoji na kraju tog segmenta). Niz $\{x_n\}$ može se opisati rekurentnom formulom

$$x_0 = s, \quad x_n = x_{n-1}qr \quad \text{ako je } n = 3k, k \in \mathbb{N}, \quad x_n = x_{n-1}q \quad \text{inače,}$$

odnosno eksplicitnom formulom $x_{3m+k} = r^m q^{3m+k} s, k = 0, 1, 2, m = 0, 1, 2, \dots$
 Za $n = 20 = 3 \cdot 6 + 2$, dobija se $x_{20} = r^6 q^{20} s \approx 0.587s$. Analogno, $x_{100} = r^{33} q^{100} s \approx 0.153s$.

114. Koji od sledećih intervala su ε -okoline broja 1 i za koje ε : $(0, 2)$, $(2/3, 4/3)$, $[-1, 3)$, $(-1, 3)$, $(1/2, 2)$, $(3/2, 5/2)$?

115. Koji od sledećih intervala su okoline broja 1: $(-5, 3/2)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$, $[0, 3]$, $(2, 3)$, $(1/2, 7)$, $(-2, -1)$?

116. Koja od sledećih tvrđenja su tačna: **a)** Skoro svaki prirodan broj je veći od 10^{58} ; **b)** Skoro svaki prirodan broj je paran; **c)** Skoro svaki prirodan broj nije deljiv sa 2005.

117. Nazovimo prirodan broj n dobrim, ako je $n^2 - 11n + 30 > 0$. Da li su skoro svi prirodni brojevi dobri?

118. Ako je $\lim x_n = 7$, dokazati da su skoro svi članovi tog niza veći od 6,99999.

119. Navesti primer jednog niza koji konvergira ka 4.

120. Navesti primer jednog niza racionalnih brojeva koji konvergira ka 4.

121. Navesti primer jednog niza koji konvergira ka 13, tako da su mu članovi naizmenično veći i manji od 13.

122. Navesti primer niza koji nema graničnu vrednost, a svi njegovi članovi pripadaju intervalu $(3, 4)$.

123. Ako je $\lim x_n = x$, dokazati da je $\lim |x_n| = |x|$.

Rešenje. Iz nejednakosti trougla dobija se da je $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$. Prema tome, ako je $|x_n - x| < \varepsilon$, onda je i $||x_n| - |x|| < \varepsilon$. Drugim rečima, ako je x_n u ε -okolini broja x , onda je i $|x_n|$ u ε -okolini broja $|x|$.

124*. Ako je $\{x_n\}$ pozitivan niz, sa $\lim x_n = 2$, dokazati da postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $x_n > \varepsilon$ za svako n . Zatim dokazati to isto u opštem slučaju, ako je $\lim x_n = x > 0$.

Rešenje. Opšti slučaj: Uzmimo bilo koje ε_1 između 0 i x , na primer $\varepsilon_1 = x/2$. Svi članovi niza počevši od nekog indeksa, nalaze se u intervalu $(\varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$, jer je to jedna okolina broja x . To znači da se u intervalu $(0, \varepsilon_1]$ nalazi eventualno samo konačno mnogo članova niza, ili nijedan. Ako ovde nema članova niza, to znači da su svi članovi niza veći od ε_1 , a ako ih ima, neka je x_* najmanji od njih, i neka je $\varepsilon = x_*/2$. Tada su svi članovi niza veći od ε .

125*. Ako je $\lim x_n = x$, pri čemu je $x_n \neq 0$ i $x \neq 0$, dokazati da je $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$.

Rešenje. Slično kao u zadatku 124, može se pokazati da postoji neko $\delta > 0$ takvo da je $|x_n| > \delta$ za svako n . Dalje je

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x_n - x|}{|x_n| \cdot |x|} < \frac{|x_n - x|}{\delta|x|} = C \cdot |x_n - x|,$$

gde je $C = 1/\delta|x|$. Odavde izlazi traženo tvrđenje.

126. a) Dokazati: Ako skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ pripadaju skupu A i ako skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ pripadaju skupu B , tada skoro svi članovi ovog niza pripadaju skupu $A \cap B$.

b) Da li tvrđenje a) važi ako se izraz "skoro svi članovi niza" zameni sa "beskonačno mnogo članova niza" ?

c) Kakva je veza između iskaza A : "Skoro svi članovi niza imaju osobinu P " i B : "Beskonačno mnogo članova niza ima osobinu P " ?

Rešenje. a) Ako skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ pripadaju skupu A , to znači da postoji neki prirodan broj n_A tako da $x_n \in A$ za $n \geq n_A$. Slično tome, ako skoro svi članovi niza pripadaju skupu B , tada $x_n \in B$ za svako $n \geq n_B$. Prema tome, za $n \geq \max(n_A, n_B)$, $x_n \in A$ i $x_n \in B$, tj. $x_n \in A \cap B$.

b) U ovom slučaju tvrđenje ne važi. Na primer, ako je A skup pozitivnih, a B skup negativnih brojeva, tada niz $x_n = (-1)^n n$ ima beskonačno mnogo elemenata i u skupu A i u skupu B , a nijedan element u skupu $A \cap B$.

c) $A \implies B$, ali ne važi obrnuto.

2.5.3. Osobine konvergentnih nizova (teorija na stranama 50-54)

127. Realan broj a ćemo zvati *dimes*¹ niza $\{x_n\}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo članova tog niza. Da li proizvoljan niz mora imati bar jedan dimes? Da li postoje nizovi koji imaju dva ili tri dimesa?

Uputstvo. Razmotriti sledeće primere: $x_n = n$, $x_n = 1 + \frac{(-1)^n(n+1)}{n}$, $x_n = \cos \frac{n\pi}{3}$.

128. Ako je pojam dimesa definisan kao u prethodnom zadatku, ispitati da li su tačna tvrđenja: **a)** Ako je $\lim x_n = a$, onda niz $\{x_n\}$ ima jedinstven (jedan i samo jedan) dimes, i on je jednak a ; **b)** Ako niz $\{x_n\}$ ima dimes, onda je $\{x_n\}$ konvergentan, pri čemu se njegov limes i dimes mogu razlikovati.

129. Dokazati da je $\lim \frac{5}{n^3} = 0$.

¹Ovaj naziv nije u standardnoj upotrebi, i važi samo lokalno, u ovom i sledećem zadatku.

130. Dokazati da je $\lim \frac{c}{n^p} = 0$, gde je $c \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Šta ako je $p = 0$ ili $p < 0$?

131. Dokazati da je $\lim \frac{n}{n+1} = 1$.

Rešenje. Ako je $x_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, tada je $|x_n - 1| = 1/(n+1)$. Kako je $y_n = 1/n$ nula-niz, onda i niz $y_{n+1} = 1/(n+1)$ konvergira ka nuli, pa je $\lim x_n = 1$.

132. Dokazati: Ako je $|x_n| \leq y_n$ za skoro svako $n \in \mathbb{N}$, i ako je $\{y_n\}$ nula niz, tada je i $\{x_n\}$ nula niz.

133. Dokazati da su skoro svi članovi nula niza manji od 1.

134. Ako je $\{x_n\}$ nula niz, dokazati da je tada i $\{|x_n|^k\}$ nula niz za svako $k > 0$. Šta ako je $k < 0$?

135. Naći $\lim \frac{\sin^2(3n) + \cos^2(2n)}{n}$.

136. Dokazati da je $\lim \frac{n^2 - n + 2}{3n^2 + 2n - 4} = \frac{1}{3}$.

137. Navesti primer konvergentnog niza $\{x_n\}$ čiji svi članovi pripadaju intervalu $(3, 4)$, dok $\lim x_n$ ne pripada tom intervalu.

138*. Neka je $\{x_n\}$ dati niz. Neka niz $\{y_n\}$ sadrži elemente niza $\{x_n\}$ u istom poretku, ali tako da se element x_n eventualno ponavlja izvestan broj puta. Označimo broj ponavljanja elementa x_n sa $k(n)$. Tada niz y_n ima oblik:

$$\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k(1)}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{k(2)}, \dots, \underbrace{x_j, \dots, x_j}_{k(j)}, \dots$$

Dokazati da važi ekvivalencija

$$\lim x_n = L \iff \lim y_n = L .$$

Rešenje. Neka je $\lim x_n = L$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji indeks n_0 tako da za svako $n > n_0$ važi nejednakost $|x_n - L| < \varepsilon$.

Neka je $n'_0 = k(1) + \dots + k(n_0)$. Svi članovi niza y_n za $n > n'_0$ su članovi niza x_n sa indeksom većim od n_0 ; prema tome, za $n > n'_0$ važi da je $|y_n - L| < \varepsilon$, iz čega sleduje da je $\lim y_n = L$.

Slično se dokazuje i obrnuto tvrđenje.

2.5.4. Beskonačne granične vrednosti i neodređenosti (teorija na stranama 54-57)

139. Navedite primer po jednog niza $\{x_n\}$, takvog da **a)** $\{x_n\}$ je konvergentan; **b)** postoji $\lim x_n$, ali $\{x_n\}$ nije konvergentan; **c)** ne postoji $\lim x_n$.

140. Ako je $\lim x_n = +\infty$, dokazati da su skoro svi članovi tog niza veći od 2.

141. Navedite primer niza $\{x_n\}$ koji ima osobinu da je $x_n < n$ za svako $n = 1, 2, \dots$ i da je $\lim x_n = +\infty$.

142. Da li određeno divergentan niz može imati sve članove u intervalu $(-1, 1)$? Ako može, navedite primer.

143. Dokazati da je: **a)** $\lim 2^{\sqrt{n}} = +\infty$, **b)** $\lim \log(1/n) = -\infty$.

Rešenje. • **a)** Nejednakost $2^{\sqrt{n}} > K$ ekvivalentna je sa $\sqrt{n} \log 2 > \log K$, tj. $n > (\log_2 K)^2 = y_0$. Prema tome, za svako $K > 0$, svi članovi sa $n > y_0$ su veći od K , što znači da niz konvergira ka $+\infty$.

• **b)** Kako je $\log(1/n) = -\log n$, nejednakost $\log(1/n) < -K$ je ekvivalentna sa $\log n > K$, tj. $n > e^K$. Dakle, svi članovi niza sa indeksom većim od e^K su manji od $-K$; odavde sleduje da je granična vrednost niza jednaka $-\infty$.

144. Koji od sledećih tipova limesa su neodređeni:

$$\frac{0}{1}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0^1, \quad 1^0, \quad 0^{+\infty}, \quad \frac{1}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty + \infty \quad ?$$

145. Naći $\lim \frac{1}{n!}$.

Rešenje. Očigledno je da je $n! > K$ za svako $n > K$. Prema tome, $\lim n! = +\infty$, odakle sleduje da je $\lim 1/n! = 0$.

146. Dokazati da niz $x_n = n^{(-1)^n}$ nema (ni konačnu ni beskonačnu) graničnu vrednost.

147. Naći $\lim x_n$ ako je $x_n = \frac{n}{n^2 + 1}$.

♣ **Rešenje.** Dati niz x_n je tipa ∞/∞ . Da bismo našli graničnu vrednost, podelimo brojilac i imenilac sa n^2 :

$$x_n = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Kad $n \rightarrow \infty$, tada $1/n^2 \rightarrow 0$, tako da imenilac gornjeg razlomka konvergira ka 1. Kako brojilac teži nuli, zaključujemo da je $\lim x_n = 0$.

148. Odrediti graničnu vrednost niza

$$x_n = 1 - 2n + 3n^2 - n^3,$$

a zatim pokazati da je proizvoljni niz

!

$$x_n = a_0 + a_1n + \dots + a_{k-1}n^{k-1} + a_k n^k \quad (k \in \mathbb{N}, a_k \neq 0)$$

određeno divergentan ka $\pm\infty$, gde je znak $+$ u slučaju $a_k > 0$ i znak $-$ ako je $a_k < 0$.

Rešenje. • Izdvajanjem najvećeg stepena, n^3 , dobija se da je

$$x_n = n^3 \left(\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n} - 1 \right),$$

odakle izlazi da je $\lim x_n = -\infty$.

• U opštem slučaju, $a_i, i = 0, \dots, k$ mogu biti različitog znaka i dati niz je tipa $\pm\infty \pm \dots \pm \infty$. Transformacijom

$$x_n = n^k (a_0/n^k + a_1/n^{k-1} + \dots + a_{k-1}/n + a_k),$$

niz se svodi na tip $\infty \cdot a_k$, odakle nalazimo da je $\lim x_n = \operatorname{sgn}(a_k) \cdot \infty$.

149*. Naći graničnu vrednost niza

$$x_n = \frac{a_0 + a_1 n + \dots + a_j n^j}{b_0 + b_1 n + \dots + b_k n^k},$$

gde su a_0, \dots, a_j i b_0, \dots, b_k , realni brojevi, $a_j \neq 0$, $b_k \neq 0$, $j, k \in \mathbb{N}$, ako je **a)** $j > k$
b) $j = k$ **c)** $j < k$.

Rešenje. • **a)** Deljenjem brojioca i imenioca sa n^j , nalazimo

$$x_n = \frac{a_0/n^j + a_1/n^{j-1} + \dots + a_{j-1}/n + a_j}{b_0/n^j + b_1/n^{j-1} + \dots + b_{k-1}/n^{j-k+1} + b_k/n^{j-k}}$$

Brojilac gornjeg razlomka teži ka a_j , dok imenilac teži nuli, jer svi sabirci teže nuli. Iz zadatka 148 zaključujemo da je, za dovoljno veliko n , znak niza x_n jednak $\text{sgn}(a_j/b_k)$, pa je $\lim x_n = \text{sgn}(a_j/b_k) \cdot \infty$.

• **b)** Deljenjem brojioca i imenioca sa n^j , dobijamo da je $\lim x_n = a_j/b_j$.

• **c)** U slučaju $j < k$, delimo brojilac i imenilac sa n^k (uvek delimo sa najvećim stepenom):

$$x_n = \frac{a_0/n^k + a_1/n^{k-1} + \dots + a_{j-1}/n^{k-j+1} + a_j/n^{k-j}}{b_0/n^k + b_1/n^{k-1} + \dots + b_{k-1}/n + b_k}.$$

Iz ovoga se vidi da je $\lim x_n = 0$.

150. Naći granične vrednosti nizova:

- a) $\frac{n^{10} + 5n^6 - 3n^4 + 8n^2 - 10^6}{12n^{11} - n^{10} - 3n + 91}$ [0]
 b) $\frac{17n^3 + 18n}{18n^3 + 19}$ [17/18]
 c) $\frac{n^7 - 3n^4 + 8n^2 - 10}{1 - 6n^6}$ [$-\infty$]

151. Naći graničnu vrednost niza $x_n = \frac{3n^{3/2} + 2n + \sqrt{n}}{5n^{3/2} + 5n + 2\sqrt{n}}$.

Rešenje. Deljenjem brojioca i imenioca sa $n^{3/2}$ dobijamo

$$x_n = \frac{3 + 2n^{-1/2} + n^{-1}}{5 + 5n^{-1/2} + 2n^{-1}}.$$

Prema tome, $\lim x_n = 3/5$.

152. Pokazati da niz $x_n = \frac{n^2(2 + (-1)^n) + n}{2n^2 + 3n}$ nema graničnu vrednost.

153. Naći graničnu vrednost niza $\{x_n\}$ ako je

- a) $x_n = \frac{2\sqrt[5]{n^2} - 3\sqrt[5]{n^3}}{3\sqrt[5]{n^2} + 2\sqrt[5]{n^3}}$, [-3/2]
 b) $x_n = \frac{3n^{3/4} + 5n^{5/6} + 7n^{7/8}}{9n^{9/10} + 10n^{10/11}}$, [0]
 c) $x_n = \frac{n + \sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}{\sqrt{10n + \sqrt{10n + \sqrt{10n}}}}$ [$+\infty$]

154. Naći $\lim \frac{\sqrt[5]{n^4} \cos(2^n n!)}{2n+3}$.

Uputstvo. Niz $\{\cos(2^n n!)\}$ je ograničen; pokazati da $\sqrt[5]{n^4}/(2n+3)$ teži nuli i iz toga izvesti da je i granična vrednost datog niza jednaka nuli.

155. Naći $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Rešenje. Izraz kojim se definiše dati niz je tipa $\infty - \infty$. Kako je

♣
$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}},$$

granična vrednost niza je 0.

156*. Dokazati da je $\lim (\sqrt[k]{n+a} - \sqrt[k]{n+b}) = 0$ za svako $k = 2, 3, \dots$ i za proizvoljne realne brojeve a i b .

[Primeniti formulu $u^k - v^k = (u-v)(u^{k-1} + u^{k-2}v + \dots + v^{k-1})$.]

157. Naći $\lim \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. [1/2]

158. Naći $\lim n^{7/4} (\sqrt[3]{n^6 + n} - n^2)$.
[Koristiti formulu $u - v = (u^3 - v^3)/(u^2 + uv + v^2)$.]

159. Odrediti prirodan broj k za koji važi

$$\lim \frac{n^{k-1}}{n^k - (n-1)^k} = \frac{1}{2005}.$$

[Razviti $(n-1)^k$ po binomnoj formuli.]

160. Zbir beskonačne geometrijske progresije. Ispitati za koje $q \in \mathbb{R}$ postoji

$$\lim(1 + q + \dots + q^n).$$

Rešenje. Neka je $x_n = 1 + q + \dots + q^n$. Ako je $q = 1$, tada je $x_n = n + 1$, pa je $\lim x_n = +\infty$.

Za $q \neq 1$, imamo da je

$$x_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Koristeći rezultat primera 13 na strani 54, imamo da je

!
$$\lim x_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{za } |q| < 1 \\ +\infty, & \text{za } q > 1. \end{cases}$$

Za $q \leq -1$ niz x_n nema graničnu vrednost.

161. Ako je $|a| < 1$, $|b| < 1$, odrediti

$$\lim \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}.$$

[$\frac{1-b}{1-a}$.]

162. Naći $\lim x_n$, gde je

$$\text{a) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n^2}, \quad \text{b) } x_n = \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{k}{n} \right|, \quad \text{c) } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}.$$

Rešenje. • a) Koristeći se formulom za zbir prvih $n-1$ prirodnih brojeva, dobijamo

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\text{odakle je } \lim x_n = \lim \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

• b) $1/2$, c) $1/3$.

163. Naći $\lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}$.

Rešenje. Ako uočimo da je $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$, imamo da je

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

odakle nalazimo da je tražena granična vrednost jednaka 1.

Primedba. Sume gornjeg oblika u kojima se susedni članovi „potiru” nazivaju se *teleskopske* sume.

164*. Dokazati: a) Ako je $x_n \geq y_n$ za skoro svako n i ako je $\lim y_n = +\infty$, tada je i $\lim x_n = +\infty$. b) Ako za skoro svako n važi $x_n \leq z_n$ i ako je $\lim z_n = -\infty$, tada je i $\lim x_n = -\infty$.

Uputstvo. a) Iz $x_n \geq y_n$ zaključujemo: ako je $y_n > K$, tada je i $x_n > K$. Ako su za svako K skoro svi članovi niza y_n veći od K , onda su i skoro svi članovi niza x_n veći od K .

165*. Dokazati da je $\lim \frac{n^n}{n!} = +\infty$.

Rešenje. Kako je, za $n \geq 2$,

$$n^n = n \cdot n^{n-1} > n \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n \cdot n!, \quad \text{imamo da je } \frac{n^n}{n!} > n,$$

odakle se dobija traženo tvrđenje.

166. Ako $x_n \rightarrow +\infty$, tada i $(x_n)^k \rightarrow +\infty$ za svako $k > 0$. Dokazati.

Da li sličan rezultat važi ako je $\lim x_n = -\infty$?

Uputstvo. Ako $x_n \rightarrow +\infty$, tada su skoro svi članovi niza x_n veći od 1, pa je $x_n^k > x_n$.

167*. Ako je $a > 0$, dokazati da je $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$.

Rešenje. Za svako dato $a > 0$ postoji neki prirodan broj $n_0 > a$. Prema tome, za $n > n_0$ imamo

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a}{1 \cdot 2 \cdots n_0 \cdots n} = \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{a^{n-n_0}}{(n_0+1) \cdots n} < \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \left(\frac{a}{n_0}\right)^{n-n_0} = C \cdot q^{n-n_0},$$

gde je $C = a^{n_0}/(n_0-1)!$, $q = a/n_0 < 1$. Kako je $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-n_0} = q^{-n_0} \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, zaključujemo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n/n! = 0$.

168*. Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \left[\frac{n-1}{2}\right]}{n}$, gde je $[x]$ ceo deo broja x .

Rešenje. Iz definicije $[x]$ (najveći ceo broj ne veći od x) imamo da je

$$\frac{n-2}{2} \leq \left[\frac{n-1}{2}\right] \leq \frac{n-1}{2}.$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{n-2}{2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{n-1}{2}}{n} = \frac{3}{2},$$

zaključujemo da je i tražena granična vrednost jednaka $3/2$.

169. Za $a, b > 0$ naći $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

[$\max(a, b)$, videti primer 17.]

170. Ako su p_1, \dots, p_m dati nenegativni brojevi, naći $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{p_1^n + \dots + p_m^n}$.

[$\max\{p_1, \dots, p_m\}$]

171. Dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} = 0$ ($b \neq 1$).

Rešenje. Primenom STOLZove teoreme (proveriti da li su izpunjeni uslovi!) dobijamo da je

♣

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_b(n+1) - \log_b n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_b \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_b 1 = 0$$

• **Primedba.** Ako bi se funkcija $x \mapsto \log_b x$ zamenila sa nekom drugom, proizvoljnom funkcijom $f(x)$, ne bismo mogli uvek da zaključimo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} f(1+1/n) = f(1)$. Ovde smo, ustvari, koristili osobinu **neprekidnosti** logaritamske funkcije, što će biti predmet glave 3 (videti primer 42 na strani 109).

172. Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, gde je **a)** $x_n = n/7^n$, **b)** $x_n = nq^n$ ($|q| < 1$).

[**a)** 0, **b)** 0.]

173. Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

Rešenje. Neka je $\{x_n\}$ niz čiji se limes traži. Logaritmovanjem dobijamo $y_n = (\log n)/n$, a zatim primenom STOLZove teoreme,

♣

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1) - \log n}{n+1 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+1}{n} = 0,$$

odakle izlazi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Ovde smo primenili "logične" korake, ali za njihovo opravdanje potrebna je teorija koju ćemo obraditi u glavi 3 (videti i primedbu u zadatku 171). Ipak, ideja sa logaritmovanjem niza je korisna u mnogim slučajevima.

174. Ako je $a > 0$, naći $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n}$.

Rešenje. Kako je za bilo koje $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a}{n} = 0$, traženi limes jednak je 1.

175. Naći $\lim 1/\sqrt[n]{n!}$.

Rešenje. U ovom slučaju ne možemo direktno da primenimo STOLZovu teoremu, između ostalog i zato što je provera da li izraz u brojiocu teži ka beskonačnosti ekvivalentna rešavanju zadatka. Međutim, logaritmovanjem nalazimo:

$$\begin{aligned} \log \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim \log \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = - \lim \frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n}{n} \\ &= - \lim \log n = - \log \lim n = -\infty . \end{aligned}$$

Antilogaritmovanjem dobijamo da je $\lim 1/\sqrt[n]{n!} = 0$.

176*. Ako je $a > 1$ i $k > 0$, dokazati da je $\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty$.

Rešenje. • Dati limes je tipa $\frac{\infty}{\infty}$. Dokazaćemo najpre da je za skoro svako n ,

$$(1) \quad \frac{a^n}{n^k} > n$$

• Nejednakost (1) ekvivalentna je sa $a^n > n^{k+1}$, odakle se logaritmovanjem dobija $n \log a > (k+1) \log n$ i konačno,

$$(2) \quad \frac{\log a}{k+1} > \frac{\log n}{n}.$$

Neka je $r = \frac{\log a}{k+1}$. Kako je $a > 1$ i $k > 0$, imamo da je $r > 0$. S druge strane, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ (zadatak 171), pa su skoro svi članovi niza $\frac{\log n}{n}$ manji od pozitivnog broja r . Ovim je dokazano da nejednakost (2), a time i (1), važi za skoro svako n .

• Iz (1) izlazi (kao u zadatku 164) da je traženi limes jednak $+\infty$.

177. Pokazati na primeru da STOLZova teorema ne može da se primeni ako y_n ne teži ka beskonačnosti, iako su ostala dva uslova ispunjena.

Rešenje. Neka je $x_n = 2 - 1/n$, $y_n = 3 - 1/n$. Tada je y_n monotono rastući niz i

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = 1 ,$$

dok je $\lim x_n/y_n = 2/3$.

178. Pokazati da tvrđenje STOLZove teoreme ne mora da važi ako y_n nije monotono rastući niz, iako su ostala dva uslova ispunjena.

Rešenje. Neka je $x_n = n$, $y_n = 2n + (-1)^n n$. Niz y_n nije monotono rastući, ali teži ka beskonačnosti i važi

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{1}{2n \cdot (-1)^{n+1} + 2 + (-1)^{n+1}} = 0 .$$

Međutim, količnik x_n/y_n nema graničnu vrednost jer je $x_n/y_n = 1/(2 + (-1)^n)$.

179. Pokazati da tvrđenje STOLZove teoreme ne mora da važi ako su ispunjena samo prva dva navedena uslova, a treći uslov (postojanje granične vrednosti količnika razlika) nije ispunjen.

Rešenje. Neka je $x_n = n + \left[\frac{n-1}{2} \right]$, $y_n = n$. Tada je

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{3 + (-1)^n}{2}$$

i granična vrednost ovog niza ne postoji. S druge strane, $\lim x_n/y_n = 3/2$, kao što je pokazano u zadatku 168.

180. a) Ako niz x_n ima graničnu vrednost, dokazati da je

$$\lim \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \lim x_n .$$

b) Naći primer niza x_n koji nema graničnu vrednost, ali je konvergentan niz aritmetičkih sredina $(x_1 + \dots + x_n)/n$.

Rešenje. • **a)** Primenom STOLZOVE toreme, dobijamo

$$\lim \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim \frac{(x_1 + \dots + x_n) - (x_1 + \dots + x_{n-1})}{n - (n-1)} = \lim x_n .$$

• **b)** Niz $x_n = (-1)^n$ zadovoljava tražene uslove.

181. Pokazati da je $\lim \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} = 1$.

182. Naći $\lim \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!}{(n+1)!}$ [1]

183*. Ako pozitivan niz x_n ima graničnu vrednost, dokazati da istu graničnu vrednost imaju i nizovi harmonijskih i geometrijskih sredina, tj. da je

$$\lim \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \lim \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = \lim x_n .$$

Rešenje. • Za niz harmonijskih sredina primenom STOLZOVE toreme nalazimo

$$\lim \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \lim \frac{1}{\frac{1}{x_n}} = \lim x_n .$$

• Za niz geometrijskih sredina dokaz možemo da izvedemo logaritmovanjem:

$$\log \lim \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = \lim \frac{\log x_1 + \dots + \log x_n}{n} = \lim \log x_n = \log \lim x_n .$$

184. a) Dokazati da za pozitivan niz x_n važi

! (1)
$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} ,$$

ukoliko granična vrednost na desnoj strani postoji.

b) Konstruisati niz x_n za koji ne postoji granična vrednost na desnoj strani u (1), a granična vrednost na levoj strani postoji i konačna je.

Rešenje. • **a)** Neka je $y_n = \log x_n$. Tada je

$$\begin{aligned} \log \lim \sqrt[n]{x_n} &= \lim \log \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{1}{n} \log x_n = \lim \frac{y_n}{n} = \lim \frac{y_{n+1} - y_n}{n+1 - n} \\ &= \lim (y_{n+1} - y_n) = \lim \log \frac{x_{n+1}}{x_n} = \log \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} . \end{aligned}$$

Prema tome, dokazali smo da je $\log \lim \sqrt[p]{x_n} = \log \lim x_{n+1}/x_n$, što je ekvivalentno sa (1).

• **b)** Neka je $x_n = 1$ ako je n paran i $x_n = 2$ ako je n neparan broj. Tada je $x_{n+1}/x_n = 1/2$ ili 2, zavisno od parnosti broja n ; granična vrednost sa desne strane u (1) ne postoji. Granična vrednost sa leve strane jednaka je jedinici.

185*. Naći graničnu vrednost

$$\lim \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Rešenje. Ako označimo izraze u brojiocu i imeniocu sa x_n i y_n respektivno, i primenimo STOLZovu teoremu, dobijamo:

$$\begin{aligned} \lim \frac{x_n}{y_n} &= \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} \\ &= \lim \frac{n^p}{n^{p+1} - (n^{p+1} - (p+1)n^p + \binom{p+1}{2}n^{p-1} - \dots + (-1)^{p+1})} = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

186*. Ako $p \in \mathbb{N}$, izračunati graničnu vrednost

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right).$$

Rešenje. Dovođenjem na zajednički imenilac imamo

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p+1)(1^p + 2^p + \dots + n^p) - n^{p+1}}{(p+1)n^p}.$$

Za svako $p \in \mathbb{N}$, imenilac gornjeg razlomka monotono raste ka $+\infty$. Primenom STOLZove teoreme nalazimo da je

$$L = \lim \frac{(p+1)n^p - n^{p+1} + (n-1)^{p+1}}{(p+1)n^p - (p+1)(n-1)^p}.$$

Iz binomnog razvoja dobijamo

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{(p+1)n^p - n^{p+1} + n^{p+1} - \binom{p+1}{1}n^p + \binom{p+1}{2}n^{p-1} - \dots + (-1)^{p+1}}{(p+1)n^p - (p+1)(n^p - \binom{p}{1}n^{p-1} + \binom{p}{2}n^{p-2} - \dots + (-1)^p)} \\ &= \lim \frac{\binom{p+1}{2}n^{p-1} - \binom{p+1}{3}n^{p-2} + \dots + (-1)^{p+1}}{(p+1)\binom{p}{1}n^{p-1} - (p+1)\binom{p}{2}n^{p-2} + \dots - (p+1)(-1)^p} \\ &= \frac{\binom{p+1}{2}}{(p+1)\binom{p}{1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2.5.5. Monotoni nizovi (teorija na stranama 57-60)

187. Navesti po jedan primer niza $\{x_n\}$, tako da **a)** $\{x_n\}$ je monotono rastući; **b)** $\{x_n\}$ nije monotono rastući (ni počevši od nekog indeksa n_0), ali je monotono neopadajući; **c)** niz nije monoton.

188. Da li postoji monotono rastući niz $\{x_n\}$, takav da je $\lim x_n = +\infty$, pri čemu je **a)** $x_n > 1$ za skoro svako n ; **b)** $x_n < 1$ za skoro svako n ? Ukoliko postoji, navesti primer.

189. Da li monotono rastući niz može biti neograničen **a)** odozdo; **b)** odozgo? Odgovorite na ista pitanja za monotono opadajući niz. U slučaju potvrdnog odgovora, navedite primere.

190. Da li je moguće da konvergentan niz $\{x_n\}$ **a)** nije ograničen; **b)** nije monoton? Ukoliko je moguće, navedite primere.

191. Da li je moguće da neodređeno divergentan niz $\{x_n\}$ bude **a)** monoton; **b)** ograničen? Ako je odgovor potvrđan, navedite primere.

192*. Neka je $\{a_n\}$ proizvoljan niz čiji su članovi cifre 0 – 9. Definišimo

$$x_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

gde $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Dokazati da je niz $\{x_n\}$ konvergentan.

Rešenje. Niz x_n je monotono rastući, jer je

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0.$$

Dati niz je i ograničen odozgo. Naime, kako je $a_i < 10$, imamo

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} < \frac{10}{10} + \frac{10}{10^2} + \cdots + \frac{10}{10^n} \\ &= 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{1 - (1/10)^n}{1 - 1/10} < \frac{1}{1 - 1/10} = \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Prema tome, dati niz ima konačnu graničnu vrednost x .

Primedba. Nije teško videti da je niz x_n u stvari niz decimalnih aproksimacija broja $x \in [0, 1]$, dok su a_n decimalne cifre tog broja.

193. Niz $\{a_n\}$ ispunjava uslove

$$2 < a_1 < 3, \quad 5a_{n+1} = a_n^2 + 6.$$

Dokazati da je niz konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Pokazaćemo da je dati niz ograničen između 2 i 3, i da je monotono opadajući.

• *Svi članovi niza su u intervalu (2, 3):* Prvi član pripada intervalu (2, 3) po pretpostavci. Pretpostavimo da je $a_n \in (2, 3)$. Tada je $4 < a_n^2 < 9$, odakle sleduje

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2 + 6) > \frac{1}{5}(4 + 6) = 2,$$

i, na sličan način

$$a_{n+1} < \frac{1}{5}(9 + 6) = 3,$$

pa je time, prema principu matematičke indukcije, dokazano da svi članovi niza pripadaju intervalu (2, 3).

• *Niz je opadajući:* Dalje, imamo da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\iff \frac{a_n^2 + 6}{5} - a_n < 0 \iff \frac{a_n^2 - 5a_n + 6}{5} < 0 \\ &\iff (a_n - 2)(a_n - 3) < 0 \iff 2 < a_n < 3, \end{aligned}$$

što je tačno, pa je niz monotono opadajući.

• *Nalaženje limesa:* Iz dokazanog proizilazi da dati niz ima konačnu graničnu vrednost a . Ako u jednakosti

$$5a_{n+1} = a_n^2 + 6$$

pustimo da $n \rightarrow \infty$, dobićemo

$$5a = a^2 + 6.$$

Ova kvadratna jednačina ima rešenja $x = 2$ i $x = 3$. Kako je niz monotono opadajući, svi članovi niza su manji od prvog, a prvi je manji od 3, pa je

$$(1) \quad x_n < x_1 < 3 \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Kako se, prema (1), svi članovi niza nalaze van ε -okoline tačke 3 (za $\varepsilon = 3 - x_1$), granična vrednost niza ne može da bude jednaka 3. Stoga je $\lim x_n = 2$.

Primedba. Ispitati da li bi niz bio konvergentan za $a_1 < 2$ ili $a_1 > 3$.

194. Dat je niz

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dokazati da je niz konvergentan i odrediti graničnu vrednost.

Rešenje. • *Monotonost i ograničenost:* Da bismo ustanovili monotonost niza, posmatrajmo razliku

$$(1) \quad x_{n+1} - x_n = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3} - x_n = \frac{-x_n^2 + x_n + 2}{x_n + 3}.$$

Iz definicije niza dobija se (indukcijom) da je svaki član niza pozitivan. Prema tome, znak razlike u (1) zavisi samo od znaka izraza $-x_n^2 + x_n + 2$. Ispitivanjem znaka ovog kvadratnog trinoma, vidimo da je on pozitivan (tj, $x_{n+1} > x_n$) za $x_n \in (-1, 2)$ i negativan van tog intervala. Kako je $x_n > 0$, dovoljno je ispitati da li su (skoro) svi članovi niza manji ili veći od 2. Ako su skoro svi veći od 2, niz će biti monotono opadajući i ograničen odozdo; ako su skoro svi manji od 2, niz će biti monotono rastući i ograničen odozgo – u oba slučaja konvergentan. Prvih nekoliko članova niza su

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{16}{9} \dots,$$

pa možemo pretpostaviti da je za svako n , $x_n < 2$. To ćemo sada i dokazati. Za $n = 1, 2, 3$, ova nejednakost je tačna. Pretpostavimo da je $x_n < 2$. Tada je

$$x_{n+1} = \frac{4(x_n + 3) - 10}{x_n + 3} = 4 - \frac{10}{x_n + 3} < 4 - \frac{10}{2 + 3} = 2,$$

pa je nejednakost dokazana matematičkom indukcijom. Iz toga zaključujemo da niz ima konačnu graničnu vrednost x .

• *Limes:* Ako u

$$x_{n+1} = \frac{4x_n + 2}{x_n + 3}$$

pustimo da $n \rightarrow \infty$, dobijamo jednačinu

$$x = \frac{4x + 2}{x + 3},$$

odakle je $x = 2$ (drugo negativno rešenje odbacujemo).