

Glava 2

Granični procesi

Cela matematička analiza je zasnovana na pojmu granične vrednosti. U ovoj glavi proučavamo granične procese na skupu realnih brojeva, a zatim i u proizvoljnim metričkim prostorima i ukazujemo na neke primene.

2.1 Realni nizovi

2.1.1 Definicija i osnovni pojmovi

Definicija 2.1 Svako preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup \mathbf{R} nazivamo **realnim nizom**. Broj koji se ovim preslikavanjem dodeljuje prirodnom broju n označava se sa x_n , a_n , itd i zove se **n -ti član niza** ili **n -ti element niza**; prirodan broj n je **indeks člana** x_n . Ako je specificirana zavisnost x_n od n , onda se x_n naziva **opštim članom niza**. Za niz $\{x_n\}$ čiji su članovi x_1, \dots, x_n, \dots koristi se oznaka $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ ili samo $\{x_n\}$.

Na sličan način mogu se definisati i nizovi kompleksnih brojeva, nizovi funkcija ili, uopšte, nizovi elemenata proizvoljnog skupa. U ovom odeljku posmatramo samo realne nizove.

Primer 7. Niz $1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$ je niz prirodnih brojeva. Niz $2, 4, 6, \dots$ je niz parnih brojeva.

Niz je određen svojim opštim članom. Na primer, ako je opšti član niza definisan sa $x_n = \frac{1}{n}$, time je određen niz $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

Za određivanje niza nije neophodno da postoji formula kojom se eksplicitno određuje x_n u zavisnosti od n . Na primer, ako je x_n n -ti po redu prost broj, niz $\{x_n\}$ je korektno definisan, iako ne postoji formula kojom bismo za dato n našli x_n . Niz cifara broja π je takođe korektno definisan niz, iako ne postoji formula koja povezuje n sa x_n .

Konačno mnogo prvih članova niza nije dovoljno za jednoznačno određivanje niza. Na primer, ako je dato prvih 10 članova

$$0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,$$

pravilo po kome su ovi članovi konstruisani može, ali naravno ne mora da važi i dalje. \square

U matematičkoj analizi proučava se ponašanje članova niza kada njihov indeks neograničeno raste („teži ka beskonačnosti“). Ova, naizgled jednostavna problematika je fundamentalna za proučavanje osobina realnih i kompleksnih brojeva, skupova i funkcija, a ima i veliki broj neposrednih primena.

Ideja je da se proučava „gomilanje“ članova niza oko neke vrednosti. Na primer, članovi nizova $\{\frac{1}{n}\}$ ili $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ „gomilaju se“ oko nule, odnosno sve su bliži nuli ukoliko je n veće. Za članove niza čiji je opšti član $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ ne bismo mogli da tvrdimo da su sve bliži nuli kada se n povećava, jer je, na primer,

$$0 < x_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} < \frac{3}{2n} = x_{2n},$$

pa je $2n$ -ti član niza na većem rastojanju od nule nego prethodni član. Međutim, ipak i ovdje postoji neko „gomilanje” oko nule, što se vidi ako se izračuna jedan broj prvih članova niza. Naime, ma koliko mali pozitivan broj ε uzeli, svi članovi niza počevši od nekog biće manji od ε . To se može i dokazati ako se uoči da je

$$x_n \leq \frac{3}{n} \quad \text{za svako } n \in \mathbf{N},$$

pa je, očigledno, $x_n < \varepsilon$ za svako $n > 3/\varepsilon$.

Uočena osobina da su za svako $\varepsilon > 0$ svi članovi niza počevši od nekog indeksa n_0 na rastojanju manjem od ε od tačke oko koje se „gomilaju” uzima se za definiciju pojma konvergenije.

Definicija 2.2 *Kažemo da je realan broj a **granična vrednost** ili **limes** niza $\{x_n\}$ i pišemo $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ ili $x_n \rightarrow a$ ako*

$$(1) \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

*Često ćemo umesto $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ pisati samo $\lim x_n$. Ako je $\lim x_n = a$, kažemo da niz $\{x_n\}$ **konvergira ka a** ili da **teži ka a** kad n teži ka beskonačnosti.*

*Ako postoji neko $a \in \mathbf{R}$ takvo da je $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, kažemo da je niz **konvergentan**.*

Videćemo kasnije da je moguće utvrditi da je niz konvergentan, a da pri tome ne znamo njegovu graničnu vrednost. Za sada, jedini način da odredimo graničnu vrednost niza je da pretpostavimo (izračunavanjem prvih nekoliko članova ili na drugi način) da je $\lim x_n = a$, za neko konkretno a , a zatim da to i dokažemo proveravajući uslov iz definicije.

Primer 8. U tekstu pre definicije 2.2 dokazali smo da je $\lim \frac{2 + (-1)^n}{n} = 0$.

Na sličan način pokazuje se da je i

$$\lim \frac{1}{n} = 0, \quad \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Dokažimo, na primer, prvu relaciju. Neka je dato $\varepsilon > 0$. Nejednakost $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ekvivalentna je sa $n > 1/\varepsilon$, pa ako stavimo $n_0 = [1/\varepsilon] + 1$, formalni uslov iz definicije 2.2 biće ispunjen: za svako dato $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takvo da za svako $n \geq n_0$ važi da je $|x_n - 0| < \varepsilon$. \square

Postoji više ekvivalentnih oblika uslova (1). Na primer, očigledno je da je (1) ekvivalentno sa

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

!

Dalje, znak \geq u (1) može se zameniti sa $>$, a znak $<$ sa \leq . Pored toga, umesto „ $(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0)$ ” može se staviti „ $(\exists y_0 \in \mathbf{R})(\forall n \geq y_0)$ ”. Ova tvrđenja je jednostavno dokazati.

Primer 9. Neka je $x_n = 2^{1/n}$. Da bismo stekli predstavu o ponašanju ovog niza, izračunajmo prvih nekoliko članova:

$$2^1 = 2, \quad 2^{1/2} = 1.41, \quad 2^{1/3} = 1.26, \quad 2^{1/4} = 1.19, \quad \dots, \quad 2^{1/10} = 1.07, \dots$$

Odavde se može pretpostaviti da je $\lim x_n = 1$. Dokažimo to. Kako je $2^{1/n} > 1$ za svako n , imamo da je nejednakost $|2^{1/n} - 1| < \varepsilon$ ekvivalentna sa $2^{1/n} < 1 + \varepsilon$, odnosno, posle logaritmovanja, $n > \log 2 / \log(1 + \varepsilon)$. To znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $y_0 = \log 2 / \log(1 + \varepsilon)$ takvo da je za $n > y_0$ ispunjena nejednakost $|x_n - 1| < \varepsilon$, pa je $\lim x_n = 1$.

Na isti način se pokazuje da je $\lim a^{1/n} = 1$ za svako $a > 0$. \square

Definicija 2.2 postaje jasnija ako se uvedu dva nova pojma.

Definicija 2.3 *Otvoreni interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ dužine 2ε sa centrom u tački $a \in \mathbf{R}$ nazivamo ε -okolinom tačke a . Pod pojmom **okolina tačke a** podrazumevamo svaki otvoreni interval koji sadrži tačku a .*

Definicija 2.4 *Kažemo da skoro svi članovi niza imaju neku osobinu P ako postoji n_0 tako da svako x_n za $n \geq n_0$ ima osobinu P .*

Drugim rečima, skoro svi članovi niza imaju osobinu P ako je imaju svi članovi niza počevši od nekog indeksa, ili, što je isto, ako tu osobinu imaju svi članovi niza osim njih konačno mnogo.

Uvedeni termin ćemo koristiti i u kontekstu kao što je „skoro svi prirodni brojevi”, „skoro svaki indeks niza” i sl.

Nejednakost $|x_n - a| < \varepsilon$ ekvivalentna je sa $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pa se definicija 2.2 može iskazati i na sledeći način.

Definicija 2.5 **Ekvivalentna definicija konvergencije niza.** *Kažemo da niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.*

Kako svaka okolina (tj. otvoreni interval koji sadrži tačku a) sadrži neku ε -okolinu i obrnuto, svaka ε -okolina je okolina, zaključujemo, polazeći od definicije 2.5, da je niz konvergentan ako i samo ako se u svakoj ε -okolini nalaze skoro svi članovi niza.

Nije teško videti da ako skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ imaju neku osobinu, onda tu osobinu imaju i skoro svi članovi niza $\{x_{n+k}\}$, za fiksirano k . Prema tome, za fiksirano k , nizovi

$$x_1, x_2, x_3, \dots \quad \text{i} \quad x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots$$

su ekvivalentni sa gledišta konvergencije, tj. ako jedan od njih konvergira ka nekom broju a , to isto važi i za drugi niz. Dakle, ako je iz nekog razloga to lakše, konvergenciju niza možemo ustanoviti za niz $\{x_{n+5}\}$ ili $\{x_{n+100}\}$ i sl., a zatim na osnovu toga zaključiti da i niz $\{x_n\}$ konvergira. !

Ako se skoro svi članovi niza nalaze u nekoj ε_0 -okolini tačke a , onda to isto važi i za svaku ε -okolinu, za $\varepsilon > \varepsilon_0$. Iz ovoga zaključujemo da je uslov definicije 2.2 ili ekvivalentne definicije 2.5 dovoljno proveriti za malo ε , odnosno za $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, gde je ε_0 proizvoljan pozitivan broj. !

Primer 10. Niz $\{(-1)^n\}$ nije konvergentan. Zaista, pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neko $a \in \mathbf{R}$ takvo da je $\lim(-1)^n = a$. Kako su svi članovi datog niza jednaki ili -1 ili 1 , to znači da se oba ova broja nalaze u proizvoljnoj ε -okolini broja a . To nije moguće za $\varepsilon < 1/2$, jer brojevi -1 i 1 ne mogu pripadati istom intervalu dužine manje od 1 . Dakle, pretpostavka nije tačna i niz nije konvergentan. \square ♣

Teorema 2.1 Niz $\{x_n\}$ konvergira ka a ako i samo ako

$$(2) \quad (\exists C \in \mathbf{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) \quad |x_n - a| < C\varepsilon.$$

Dokaz. Ako je $\lim x_n = a$, tada se (2) (sa $C = 1$) dobija iz definicije 2.2.

Obrnuto, ako važi (2) onda se za svako $\varepsilon > 0$ skoro svi članovi niza nalaze u $C\varepsilon$ -okolini broja a ; zbog toga što je ε proizvoljno, ovo je ekvivalentno sa tvrdnjom da se u svakoj okolini broja a nalaze skoro svi članovi niza, pa on, prema definiciji 2.5, konvergira ka a . \square

Teoremu 2.1 ćemo veoma često primenjivati, uglavnom u situacijama kada je lakše pokazati da je, na primer, $|x_n - a| < 2\varepsilon$ nego da je $|x_n - a| < \varepsilon$. Naglasimo da broj C koji se pojavljuje u (2) ne sme da zavisi od ε . !

2.1.2 Osobine konvergentnih nizova

Prva osobina koju ćemo dokazati je jedinstvenost granične vrednosti.

Teorema 2.2 Niz ne može imati više od jedne granične vrednosti.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lim x_n = a$ i $\lim x_n = b$. Ako je $a \neq b$, onda postoji neko $\varepsilon > 0$ takvo da ε -okoline brojeva a i b nemaju zajedničkih elemenata (može se uzeti $\varepsilon = |a - b|/2$, na primer). Iz definicije sleduje da se svi članovi niza $\{x_n\}$

sa indeksom većim od nekog n_1 nalaze u ε -okolini broja a . Isto tako, svi članovi niza sa indeksom većim od nekog n_2 nalaze se u ε -okolini broja b . To znači da se svi članovi niza sa indeksom koji je veći i od n_1 i od n_2 nalaze u obe okoline, što je nemoguće, jer smo ε izabrali tako da one nemaju zajedničkih elemenata. Prema tome, nemoguće je da je $a \neq b$. \square

Za niz $\{x_n\}$ kažemo da je **ograničen niz** ako je skup svih elemenata tog niza ograničen, tj. ako postoji neki realan broj $M \geq 0$ takav da je $|x_n| \leq M$ za svako $n \in \mathbf{N}$.

Teorema 2.3 Svaki konvergentan niz je ograničen.

Dokaz. Neka je $\lim x_n = a \in \mathbf{R}$. Uzmimo proizvoljno $\varepsilon > 0$, na primer $\varepsilon = 1$. Počevši od nekog indeksa n_0 , svi članovi niza $\{x_n\}$ pripadaju intervalu $(a-1, a+1)$. Neka je m_1 najmanji, a M_1 najveći od preostalih elemenata niza. Definišimo

$$m = \min(a-1, m_1), \quad M = \max(a+1, M_1).$$

Sada je očigledno da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $m \leq x_n \leq M$, iz čega sleduje da je niz ograničen. \square

Ograničenost niza je, prema teoremi 2.3, potreban uslov konvergencije. To nije i dovoljan uslov; na primer, niz $\{(-1)^n\}$ je ograničen ali nije konvergentan.

Sledeća teorema pokazuje da se sa limesom može proći kroz osnovne operacije. Dokaz ove teoreme je veoma instruktivan, jer ilustruje primenu nejednakosti trougla, što je osnovna ideja i u dokazivanju mnogih drugih teorema. Ideja se sastoji u sledećem: Ako znamo da je $|a-b| < \varepsilon$ i da je $|b-c| < \varepsilon$, tada iz

$$|a-c| = |a-b+b-c| \leq |a-b| + |b-c|$$

zaključujemo da je $|a-c| < 2\varepsilon$.

I ostale ideje iz ovog dokaza će se često kasnije ponavljati.

Teorema 2.4 (i) Ako je $x_n = c \in \mathbf{R}$ za skoro svako n , tada je $\lim x_n = c$.

(ii) Neka je $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$ ($x, y \in \mathbf{R}$) i neka su a, b, c proizvoljni realni brojevi. Tada važi:

$$\begin{aligned} \lim (ax_n + by_n) &= ax + by, & \lim (x_n + c) &= x + c, \\ \lim x_n y_n &= xy; & \lim \frac{x_n}{y_n} &= \frac{x}{y} \text{ ako } y \neq 0 \text{ i } y_n \neq 0 \text{ za } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Dokaz. Tvrdjenje (i) je posledica činjenice da se broj c nalazi u svakoj svojoj okolini.

Dokažimo prvo tvrdjenje u (ii). Neka je $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$. Fiksirajmo proizvoljno $\varepsilon > 0$. Počevši od nekog indeksa, nazovimo ga n_1 , svi članovi niza $\{x_n\}$ nalaze se u ε -okolini broja x . Isto tako, počevši od nekog indeksa n_2 , svi članovi niza $\{y_n\}$ nalaze se u ε -okolini broja y . Neka je $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Tada su, za svako $n \geq n_0$ ispunjene obe nejednakosti

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |y_n - y| < \varepsilon,$$

pa iz nejednakosti trougla sleduje da je, za $n \geq n_0$

$$|ax_n + by_n - (ax + by)| = |(ax_n - ax) + (by_n - by)| \leq |a| \cdot |x_n - x| + |b| \cdot |y_n - y| \leq (|a| + |b|)\varepsilon.$$

Primenom teoreme 2.1, zaključujemo da je $\lim (ax_n + by_n) = ax + by$.

Drugo tvrdjenje u (ii) je posledica dokazanog, jer ako stavimo da je $y_n = c$ za svako n , tada na osnovu (i) imamo da je $\lim y_n = c$, pa je $\lim(x_n + c) = x + c$.

Dokažimo sada treće tvrdjenje u (ii). Neka je $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$. Fiksirajmo proizvoljno $\varepsilon > 0$.

Primenom nejednakosti trougla imamo da je

$$(3) \quad |x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \leq |y_n| \cdot |x_n - x| + |x| \cdot |y_n - y|.$$

Prema teoremi 2.3, postoji realan broj $M > 0$ takav da je $|y_n| \leq M$ za svako $n \in \mathbf{N}$. Dalje, isto kao u dokazu prvog tvrdjenja u (ii), postoji n_0 takvo da za $n \geq n_0$ važe nejednakosti $|x_n - x| < \varepsilon$ i $|y_n - y| < \varepsilon$. Sada, na osnovu (3), zaključujemo da za svako $n \geq n_0$ važi nejednakost

$$|x_n y_n - xy| \leq (M + |x|)\varepsilon$$

i tvrdjenje je dokazano.

Na kraju, dokažimo četvrto tvrdjenje u (ii). Neka je $\lim x_n = x$ i $\lim y_n = y$, gde je $y \neq 0$. Primenom nejednakosti trougla imamo da je

$$(4) \quad \left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| = \left| \frac{x_n y - y_n x}{y_n y} \right| \leq \frac{|x_n y - xy| + |xy - y_n x|}{|y_n| \cdot |y|} \\ = \frac{|y| \cdot |x_n - x| + |x| \cdot |y_n - y|}{|y_n| \cdot |y|}.$$

Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takvo da je $|x_n - x| < \varepsilon$ i $|y_n - y| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_0$. Prema tome, brojilac poslednjeg razlomka u (4) je manji od $(|x| + |y|)\varepsilon$.

Kako je $y \neq 0$, postoji neko $\delta > 0$ takvo da interval $(-\delta, \delta)$ nema zajedničkih tačaka sa intervalom $(y - \delta, y + \delta)$ (na primer, može se uzeti $\delta = |y|/2$). U intervalu $(y - \delta, y + \delta)$ nalaze se svi članovi niza $\{y_n\}$ počevši od nekog indeksa n_1 , pa je $|y_n| \geq \delta$ za $n \geq n_1$ i imenilac poslednjeg razlomka u (4) je veći od $\delta|y|$.

Dakle, ako je $n \geq \max(n_0, n_1)$ imamo da je

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y} \right| \leq \frac{|x| + |y|}{\delta|y|} \varepsilon,$$

pri čemu δ ne zavisi od ε . Ovim je dokazano da je $\lim(x_n/y_n) = x/y$. \square

Iz dokazane teoreme jednostavno se može dobiti teorema 2.2 o jedinstvenosti granične vrednosti. Naime, ako pretpostavimo da je $\lim x_n = a$ i $\lim x_n = b$, imamo da je $0 = \lim 0 = \lim(x_n - x_n) = a - b$, pa je $a = b$.

Posebnu ulogu među konvergentnim nizovima imaju nizovi koji konvergiraju ka nuli – tzv. **nula-nizovi**. Zapravo, proučavanje konvergentnih nizova može se svesti na proučavanje samo nula-nizova, jer važi

Teorema 2.5 Niz $\{x_n\}$ konvergira ka $a \in \mathbf{R}$ ako i samo ako niz $\{x_n - a\}$ konvergira ka nuli.

Dokaz. Neka je $\lim x_n = a$. Na osnovu teoreme 2.4 imamo da je $\lim(x_n - a) = \lim x_n - a = 0$. Obrnuto, neka je $\lim(x_n - a) = 0$. Tada je $\lim(x_n - a + a) = \lim(x_n - a) + a = a$, pa niz $\{x_n\}$ konvergira ka a . \square

Ako se nula-niz pomnoži ograničenim nizom, dobijeni niz je ponovo nula-niz. To tvrdi sledeća teorema.

Teorema 2.6 Neka je $\{x_n\}$ nula-niz i neka je $\{y_n\}$ proizvoljan ograničen niz (koji ne mora biti konvergentan). Definišimo $z_n = x_n y_n$, $n = 1, 2, \dots$. Tada je $\{z_n\}$ nula-niz.

Dokaz. Kako je $\{y_n\}$ ograničen niz, postoji realan broj $M > 0$ takav da je $|y_n| < M$ za svako n . Iz konvergencije niza $\{x_n\}$ ka nuli sleduje da za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takvo da za $n \geq n_0$ važi nejednakost $|x_n| < \varepsilon$. Prema tome, za $n \geq n_0$ imamo da je $|z_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M\varepsilon$ i niz $\{z_n\}$ konvergira ka nuli na osnovu teoreme 2.1.

Primer 11. Neka je $z_n = \frac{\sin n}{n}$. Kako je $\{\sin n\}$ ograničen niz, a $\frac{1}{n}$ nula-niz, primenom teoreme 2.6 zaključujemo da je $\lim z_n = 0$. \square

Sledeća teorema odnosi se na prolaz limesom kroz relaciju poretka.

Teorema 2.7 (i) Ako je $\lim x_n = a > p (< p)$, tada je $x_n > p (< p)$ za skoro svako n .

(ii) Ako je niz $\{x_n\}$ konvergentan i ako je $x_n \geq p (\leq p)$ za skoro svako n , onda je $\lim x_n \geq p (\leq p)$.

Dokaz. (i) Neka je $\lim x_n = a$ i neka je $a > p$. Uzmimo da je $\varepsilon = (a - p)/2$. Svi brojevi koji se nalaze u ε -okolini broja a su veći od p , a skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ se nalaze u ovoj okolini. Ovim je tvrđenje dokazano. Drugi deo (za slučaj $a < p$) dokazuje se analogno.

(ii) Neka je $\lim x_n = a$ i neka je $x_n \geq p$ za skoro svako n . Ako bi bilo $a < p$, tada bi iz dokazanog pod (i) imali da je $x_n < p$ za skoro svako n , a to je kontradikcija sa pretpostavkom da je $x_n \geq p$ za skoro svako n . Dakle, mora biti $a \geq p$, što je i trebalo dokazati. Ako je $x_n \leq p$, dokaz je analogan. \square

Iz teoreme 2.7 izlazi da ako je $\lim x_n > 0$, tada su skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ pozitivni. Ako su svi članovi konvergentnog niza pozitivni, onda je granična vrednost niza nenegativna.

Iz $x_n > p$ ne može se zaključiti da je $\lim x_n > p$. Na primer, iako je $1/n > 0$ za svako n , ipak je $\lim x_n = 0$.

Teorema 2.8 *Ako svi članovi konvergentnog niza $\{x_n\}$ pripadaju segmentu $[a, b]$, tada i $\lim x_n \in [a, b]$.*

Dokaz. Neka je $\lim x_n = x$ i neka $x_n \in [a, b]$ za skoro svako n . To znači da za skoro svako n važi da je $x_n \geq a$ i $x_n \leq b$; na osnovu teoreme 2.7 zaključujemo da je $x \geq a$ i $x \leq b$, odnosno $x \in [a, b]$.

2.1.3 Beskonačne granične vrednosti

Posmatrajmo nizove $x_n = n^2$, $y_n = n + \sin n$, $z_n = (-1)^n n + n + \frac{1}{n}$. Sva tri niza su neograničena, prema tome, nijedan od njih nije konvergentan. Međutim, dok treći niz sadrži i velike (sa parnim indeksom) i male članove (sa neparnim), prva dva niza imaju osobinu da je samo konačno mnogo njihovih članova manje od svakog, bilo kako velikog broja.

Definicija 2.6 *Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $+\infty$, u oznaci $\lim x_n = +\infty$ ako su, za svako dato $K > 0$, skoro svi članovi niza veći od K , tj.*

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n > K.$$

Kažemo da niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $-\infty$, u oznaci $\lim x_n = -\infty$ ako su, za svako $K > 0$, skoro svi članovi niza manji od $-K$, odnosno

$$(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad x_n < -K.$$

*U ovim slučajevima kaže se i da je niz **određeno divergentan** ili da **divergira ka beskonačnosti**.*

Definicija 2.6 postaje analogna definiciji 2.5, ako se uvede pojam **okoline beskonačnosti**. Pod okolinom tačke $+\infty$ podrazumevamo interval $(K, +\infty)$, a okolina tačke $-\infty$ je interval $(-\infty, -K)$, za proizvoljno $K \in \mathbf{R}$.

Sada možemo reći da niz konvergira ka $+\infty$ ako i samo ako se u svakoj okolini tačke $+\infty$ nalaze skoro svi članovi niza.

Očigledno je $\lim x_n = -\infty$ ako i samo ako je $\lim(-x_n) = +\infty$.

Svaki realni niz spada u jednu od tri kategorije:

- Konvergira ka nekom realnom broju a (konvergentan niz),
- Konvergira ka $\pm\infty$ (određeno divergentan niz),
- Nema ni konačnu ni beskonačnu graničnu vrednost (neodređeno divergentan niz).

Primer 12. Za koje vrednosti $q \in \mathbf{R}$ je konvergentan **geometrijski niz** $\{q^n\}$?

Rešenje. Ako je $q = 1$, svi članovi datog niza su jednaki 1, pa je i $\lim q^n = 1$.

Za $q = -1$ imamo niz $(-1)^n$ za koji znamo da nema graničnu vrednost.

Za $|q| < 1$, niz teži nuli, što je jasno ako se posmatra niz za, na primer, $q = 1/2$:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

Da bismo to i dokazali, uočimo da je

$$|q^n| < \varepsilon \iff |q|^n < \varepsilon \iff n \log |q| < \log \varepsilon \iff n > \frac{\log \varepsilon}{\log |q|},$$

gde je u poslednjoj nejednakosti promenjen smer zbog $\log |q| < 0$. Prema tome, ako je $n > \log \varepsilon / \log q$ onda je $|q|^n < \varepsilon$, pa je $\lim |q|^n = 0$.

Ako je $q > 1$ dati niz bekonačno raste. Nejednakost $q^n > K$ ekvivalentna je sa $n > \log K / \log q$, pa je $\lim q^n = +\infty$.

Za $q < -1$, članovi niza sa parnim indeksom su pozitivni, a sa neparnim indeksom su negativni, a svi članovi po apsolutnoj vrednosti beskonačno rastu. Prema tome, niz u ovom slučaju nema graničnu vrednost.

Iz navedenog proizilazi da je niz konvergentan za $q \in (-1, 1]$. \square

Sledeća teorema se lako dokazuje, ali je važna zbog primena.

Teorema 2.9 Ako je $\lim x_n = x \in \mathbf{R}$ i $\lim y_n = +\infty$, tada je

$$\lim (x_n + y_n) = +\infty, \quad \lim x_n y_n = \operatorname{sgn} x \cdot \infty \quad (x \neq 0), \quad \lim \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Ako je $\lim x_n = 0$ i ako su skoro svi članovi niza $\{x_n\}$ pozitivni, tada je $\lim \frac{1}{x_n} = +\infty$.

U nekim slučajevima kombinacije dva niza, rezultat se ne može unapred odrediti kao u slučajevima opisanim u teoremi 2.9. Tada kažemo da je granična vrednost **neodređena** ili **neodređenog tipa**. To ne znači da ova granična vrednost ne postoji, već samo da se ne može unapred odrediti primenom pravila poput onih koja su navedena u teoremi 2.9.

Na primer, ako je $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$, niz $\{x_n/y_n\}$ može biti konvergentan ili divergentan. Ovo je tzv. neodređenost **tipa** ∞/∞ . U svakom konkretnom slučaju, primenom nekih transformacija, određujemo graničnu vrednost datog izraza.

Primer 13. Izraz $x_n = \frac{3n^2 + 2n + 5}{2n^2 - n + 1}$ je neodređenost tipa ∞/∞ , jer i brojilac i imenilac konvergiraju ka $+\infty$. Deljenjem brojioca i imenioca sa n^2 dobijamo da je

$$x_n = \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Odavde, primenom pravila navedenih u teoremi 2.4 na strani 30, nalazimo da je $\lim x_n = 3/2$. \square

Postoji sedam tipova neodređenosti.

Neodređeni su izrazi tipa

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0.$$

U sledećem odeljku dajemo dve teoreme koje se primenjuju za određivanje graničnih vrednosti neodređenog tipa.

2.1.4 Dve teoreme o nizovima

Teorema 2.10 Teorema o dva žandara. Neka su $\{y_n\}$ i $\{z_n\}$ nizovi za koje je $\lim y_n = \lim z_n = c$, gde je $c \in \mathbf{R}$. Ako za skoro svako n važe nejednakosti

$$y_n \leq x_n \leq z_n,$$

tada i niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost i važi da je $\lim x_n = c$.

Dokaz. Neka je $\lim y_n = \lim z_n = c$. Pretpostavimo najpre da je $c \in \mathbf{R}$. Tada za fiksirano $\varepsilon > 0$ postoji n_1 takvo da se svi članovi niza $\{y_n\}$ za $n \geq n_1$ nalaze u ε -okolini broja c i postoji n_2 takvo da se svi članovi niza $\{z_n\}$ nalaze u istoj okolini. Dakle, za n veće i od n_1 i od n_2 (formalno, za $n \geq \max(n_1, n_2)$), članovi oba niza

pripadaju intervalu $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Počevši od nekog n_3 važi da je $y_n \leq x_n \leq z_n$; dakle, za $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$ imamo da je

$$c - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < c + \varepsilon,$$

pa se, prema tome, svi članovi niza $\{x_n\}$ sa $n \geq n_0$ nalaze u ε -okolini broja c , što znači da je $\lim x_n = c$.

Ako je $c = +\infty$, potrebna nam je samo nejednakost $y_n \leq x_n$. Zaista, zbog $\lim y_n = +\infty$, za svako $K > 0$ postoji n_1 takvo da je $y_n > K$ za $n \geq n_1$. Ako je $x_n \geq y_n$ za $n \geq n_2$, onda za $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ važi da je $x_n \geq y_n \geq K$, odakle izlazi da je $\lim x_n = +\infty$. Slučaj $c = -\infty$ dokazuje se analogno. \square

Teorema 2.10 je samo uvod u razne metode poređenja veličina koje teže istoj graničnoj vrednosti, koje ćemo kasnije detaljno obrađivati. Ona se često primenjuje sa $y_n = c$ ili $z_n = c$ za svako n .

Svoj popularni naziv ova teorema je dobila po tome što nizovi $\{y_n\}$ i $\{z_n\}$ „sprovode” niz $\{x_n\}$ ka graničnoj vrednosti c .

Primer 14. Neka je dat niz $\{x_n\}$, sa $x_n = \frac{\log(1+n)}{1+n^2}$.

Matematičkom indukcijom se bez teškoća dokazuje da je $\log(1+n) < n$ za svako $n \in \mathbf{N}$ (u stvari, važi i opštija nejednakost, $\log(1+x) < x$ za svako $x > 0$). Odavde je

$$0 \leq \frac{\log(1+n)}{1+n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Kako je $\lim 1/n = 0$, zaključujemo, prema teoremi 2.10, da je i $\lim x_n = 0$.

Primer 15. Za $a, b > 0$ naći $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n}$.

Rešenje. Pretpostavimo da je $a \leq b$. Tada je

$$b^n \leq a^n + b^n \leq 2b^n, \quad \text{odakle je} \quad b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq 2^{1/n}b.$$

Kako je $\lim 2^{1/n} = 1$, imamo da je $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = b = \max(a, b)$.

Teorema 2.11 Stolzova teorema. Neka su ispunjeni uslovi:

1° $\lim y_n = +\infty$,

2° niz $\{y_n\}$ je monotono rastući, tj. $y_{n+1} > y_n$ za skoro svako n ,

3° postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, gde je $\{x_n\}$ proizvoljan niz.

Tada postoji i $\lim x_n/y_n$ i važi jednakost

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

Dokaz. Neka su ispunjeni uslovi 1°, 2° i 3°. Bez smanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $y_{n+1} > y_n$ i $y_n > 0$ za svako n . Primitimo da je

$$(5) \quad \lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

i pretpostavimo najpre da je ova granična vrednost konačna; obeležimo je sa a .

Definišimo, iz formalnih razloga, $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$. Napišimo razliku $x_n/y_n - a$ u obliku

$$\frac{x_n}{y_n} - a = \sum_{k=1}^n \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - a \right) = \sum_{k=1}^n t_{kn} \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - a \right),$$

♣

gde je $t_{kn} = (y_k - y_{k-1})/y_n$. Očigledno je $\sum_{k=1}^n t_{kn} = 1$ za svako n .

Zbog 3°, za fiksirano $\varepsilon > 0$ postoji k_0 takvo da je

$$\left| \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - a \right| < \varepsilon, \quad \text{za } k \geq k_0.$$

Prema tome, za $n \geq k_0$ važi

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} t_{kn} \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - a \right| + \varepsilon \sum_{k=k_0}^n t_{kn},$$

gde smo koristili činjenicu da je $t_{kn} > 0$. Kako je $\sum_{k=1}^n t_{kn} = 1$, onda je $\sum_{k=k_0}^n t_{kn} \leq 1$,

pa je

$$(6) \quad \left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^{k_0-1} (y_k - y_{k-1}) \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - a \right| + \varepsilon.$$

Poslednja nejednakost važi za svako $n \geq k_0$. Kako je k_0 fiksirano, a $\lim y_n = +\infty$, imamo da je

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^{k_0-1} (y_k - y_{k-1}) \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - a \right| = 0,$$

odakle sleduje da je, za dovoljno veliko n , recimo $n \geq n_0$,

$$\frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^{k_0-1} (y_k - y_{k-1}) \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - a \right| < \varepsilon.$$

Sada iz (6) izlazi da je $\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < 2\varepsilon$ za $n \geq n_0$, čime je dokaz završen.

Pretpostavimo sada da je granična vrednost u (5) beskonačna, na primer $+\infty$ i pretpostavimo (bez smanjenja opštosti) da je $(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1}) > 0$ za svako n . Za fiksirano $K > 0$ postoji neko k_0 takvo da je $\frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} > K$ za $k \geq k_0$, pa je

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{y_k - y_{k-1}}{y_n} \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} \\ &\geq \frac{1}{y_n} \sum_{k=1}^{k_0-1} (y_k - y_{k-1}) \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} + K \sum_{k=k_0}^n t_{kn} \geq K \sum_{k=k_0}^n t_{kn}. \end{aligned}$$

Kako $y_n \rightarrow +\infty$, za dovoljno veliko n , recimo za $n \geq n_0$ imamo da je

$$\sum_{k=k_0}^n t_{kn} = 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k_0-1} (y_k - y_{k-1}) \geq 1 - \frac{1}{K},$$

pa je, za $n \geq n_0$,

$$\frac{x_n}{y_n} > K \left(1 - \frac{1}{K}\right) = K - 1,$$

iz čega zaključujemo da je $\lim x_n/y_n = +\infty$. \square

STOLZova teorema koristi se u slučajevima neodređenosti tipa ∞/∞ . Često je lakše naći $\lim(x_{n+1} - x_n)/(y_{n+1} - y_n)$ nego $\lim x_n/y_n$. Čitalac koji ima neka prethodna znanja primetiće da je STOLZova teorema analogna L'HOSPITALovom pravilu, koje se takođe veoma mnogo primenjuje za rešavanje limesa količnika funkcija (videti 3.3.5).

Primer 16. Odredimo $\lim n/2^n$. Kako niz $\{2^n\}$ monotono teži ka $+\infty$, i kako je

$$\lim \frac{n+1-n}{2^{n+1}-2^n} = \lim \frac{1}{2^n} = 0,$$

uslovi za primenu STOLZove teoreme su ispunjeni, pa je i $\lim n/2^n = 0$.

2.1.5 Monotoni nizovi

Definicija 2.7 Za niz $\{x_n\}$ kažemo da je monotono rastući (opadajući, neopadajući, nerastući) ako za skoro svako $n \in \mathbf{N}$ važe redom nejednakosti

$$x_{n+1} > x_n \quad (x_{n+1} < x_n, \quad x_{n+1} \geq x_n, \quad x_{n+1} \leq x_n).$$

Za niz koji ima jednu od navedenih osobina kažemo da je **monoton niz**.

U sledećoj teoremi pojavljuju se pojmovi supremuma i infimuma niza. Pod **supremumom niza** podrazumevamo supremum skupa elemenata tog niza:

$$\sup x_n \stackrel{def}{=} \sup\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Infimum niza, $\inf x_n$ definiše se analogno, $\inf x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

Teorema 2.12 *Svaki monoton niz ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost. Ako je niz $\{x_n\}$ monotono neopadajući, tada je $\lim x_n = \sup x_n$; za monotono nerastući niz važi da je $\lim x_n = \inf x_n$. Monoton i ograničen niz je konvergentan, tj. ima konačnu graničnu vrednost.*

Dokaz. U dokazu možemo, bez smanjenja opštosti, pretpostaviti da je niz monoton počevši od $n = 1$.

Pretpostavimo da je niz $\{x_n\}$ monotono neopadajući i ograničen odozgo. Neka je $\sup x_n = c \in \mathbf{R}$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 , takvo da je $x_{n_0} > c - \varepsilon$. Kako je $\{x_n\}$ neopadajući niz, nejednakost $x_n > c - \varepsilon$ važi i za svako $n \geq n_0$. S druge strane, kako je $c = \sup x_n$, imamo da je $x_n < c$ za svako n . Odavde zaključujemo da za $n \geq n_0$ važe nejednakosti $-\varepsilon < x_n - c < 0$, tj. $|x_n - c| < \varepsilon$, pa je $\lim x_n = c$. Drugi deo tvrđenja (za monotono nerastući niz) dokazuje se analogno.

Posmatrajmo sada niz $\{x_n\}$ koji je monotono neopadajući i neograničen odozgo. U ovom slučaju je $\sup x_n = +\infty$, pa treba dokazati da je i $\lim x_n = +\infty$. Iz neograničenosti sleduje da za svako $K > 0$ postoji neko n_0 takvo da je $x_{n_0} > K$, a onda iz pretpostavke da je niz monotono neopadajući izlazi da je $x_n > K$ za svako $n \geq n_0$. Prema tome, za svako $K > 0$ postoji n_0 takvo da je $x_n > K$ za $n \geq n_0$, što znači da je $\lim x_n = +\infty$. U slučaju kada je $\{x_n\}$ monotono nerastući i neograničen, na sličan način se pokazuje da je $\lim x_n = -\infty$. \square

Iz dokazane teoreme proizilazi postupak za nalaženje granične vrednosti monotonog i ograničenog niza $\{x_n\}$, koji ćemo opisati na jednom primeru.

Primer 17. Niz $\{x_n\}$ definisan je sa

$$(7) \quad x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Ovo je tzv. **rekurentna formula** ili rekurentna veza. Karakteristično za ovakve formule je da se sledeći član niza izračunava pomoću već određenih članova, u opštem slučaju, $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$. Iz formule (7) možemo naći prvih nekoliko članova niza¹

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{4}{5}, \quad x_3 = \frac{40}{41}, \quad \dots$$

Odavde možemo pretpostaviti da su svi članovi niza u intervalu $(0, 1)$. To sada nije teško i dokazati: $x_n > 0$ je očigledno tačno (trivijalan dokaz matematičkom indukcijom), dok iz $x_1 < 1$ i

$$x_{n+1} < 1 \iff \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} < 1 \iff 5x_n + 4 < 4x_n + 5 \iff x_n < 1 \quad (n \geq 1)$$

¹U stvari, može se naći i opšti član niza u eksplisicnom obliku, ali nam to ovde nije cilj.

zaključujemo, primenom matematičke indukcije, da je $x_n < 1$ za svako n . Dakle, niz $\{x_n\}$ je ograničen.

Prvih nekoliko članova ukazuju na to da niz verovatno raste. Dokaz je jednostavan, jer

$$x_{n+1} > x_n \iff \frac{5x_n + 4}{4x_n + 5} > x_n \iff x_n^2 < 1,$$

što je tačno na osnovu prethodnog.

Kako je dati niz ograničen i monotono rastući, on je i konvergentan. Neka je $\lim x_n = c$. Ako u (7) pustimo da $n \rightarrow +\infty$, dobijamo da je

$$c = \frac{5c + 4}{4c + 5},$$

odakle je $c^2 = 1$. Kako je niz pozitivan, c ne može biti -1 , što znači da je $c = 1$. \square

Postupak naveden u primeru 17 može izgledati nepotrebno komplikovan. Zar nismo mogli bez prethodnog ispitivanja konvergencije da dokažemo da je $\lim x_n = 1$, puštajući da $n \rightarrow +\infty$ u jednakosti (7)? Nismo, kao što pokazuje sledeći jednostavan primer.

Primer 18. Neka je niz $\{x_n\}$ definisan sa

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = 2 - x_n.$$

Nije teško pokazati da su članovi niza naizmenično 0 i 2, pa on nema graničnu vrednost. Ali ako bez provere pretpostavimo da ona postoji i da je jednaka c , iz definicione relacije nalazimo da je $c = 2 - c$, odnosno $c = 1$. \square

Naravno, niz ne mora biti monoton da bi bio konvergentan, tako da je izloženi postupak samo jedan od načina da se dokaže konvergencija niza.

Primer 19. Definicija broja e . Broj e , osnova tzv. „prirodnog logaritma”, jedan je od četiri najvažnija realna broja u matematici, pored brojeva 0, 1 i π . Izbor broja e nije stvar konvencije (kao što je, recimo, izbor broja 10 za bazu decimalnog sistema zapisivanja brojeva), već se on prirodno pojavljuje u matematici, što će se videti kasnije.

Broj e se definiše kao granična vrednost (tipa 1^∞)

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Ova granična vrednost postoji, jer je niz $x_n = (1 + 1/n)^n$ monotono rastući i ograničen, kao što ćemo to sada pokazati.

Jednostavnim algebarskim transformacijama dobijamo da je

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.$$

Prema BERNOULLIjevoj nejednakosti (teorema 1.6 na strani 10), imamo da je

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2}, \quad n \geq 2.$$

Oдавde je, za $n \geq 2$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n+2}{n+1} \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1,$$

pa je niz $\{x_n\}$ monotono rastući. Dalje, primenom binomnog razvoja dobijamo

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!n^n}.$$

Kako je, za $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!n^k} &= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \\ &< \frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2} < \frac{1}{2^{k-1}}, \end{aligned}$$

zaključujemo da je

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} < 3.$$

Prema tome, niz $\{x_n\}$ je ograničen.

Iz definicione jednakosti moguće je i približno izračunati broj e , ali je konvergencija spora, tako da se u praksi koriste drugi nizovi koji takođe konvergiraju ka broju e , ali brže (videti zadatak 254). Jedna približna vrednost je $e \approx 2.718281828$.

Primer 20. Zasnivanje elementarnih funkcija. Kao što smo već napomenuli u odeljku 1.3.2, na stranama 15 i 18, mi operišemo sa funkcijama kao što su na primer eksponencijalna funkcija, a da ih zapravo nismo definisali u svim slučajevima. Izrazi oblika a^n , gde je n prirodan broj, mogu se definisati svođenjem na operaciju množenja. Izrazi oblika $a^{p/q}$, gde su p i q prirodni brojevi, mogu se takođe svesti na osnovne operacije stepenovanja i korenovanja. Ali, izrazi oblika a^x , gde je x iracionalan broj, ne mogu se automatski svesti na osnovne operacije, već se moraju definisati. Jedan prirodan način da se to uradi je sledeći. Ako je $\{r_n\}$ niz racionalnih brojeva koji konvergira ka realnom broju x (videti i primer 23), definišemo

$$(8) \quad a^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}.$$

Da bi ovo bila valjana definicija, treba pokazati da limes u (8) postoji i da ne zavisi od izbora niza $\{r_n\}$ koji konvergira ka x . To se može uraditi polazeći od osobina funkcije $x \mapsto a^x$ definisane na skupu racionalnih brojeva.

Drugi način (ekvivalentan navedenom) da se definiše eksponencijalna funkcija jeste da se stavi da je

$$(9) \quad a^x = \sup_{r \in \mathbf{Q}, r \leq x} a^r = \inf_{r \in \mathbf{Q}, r \geq x} a^r,$$

pri čemu treba pokazati da supremum i infimum postoje i da su jednaki.

Logaritamska funkcija se definiše kao funkcija inverzna eksponencijalnoj, a zatim se pomoću ove dve funkcije mogu definisati i ostale osnovne elementarne funkcije kao što je već rečeno.

Primitimo da ni opisana definicija nije striktna, jer se bazira na intuitivnom značenju operacije stepenovanja i korenovanja. U potpuno striktnom zasnivanju funkcija, polazi se od aksioma realnih brojeva, a zatim se dokazuje postojanje stepena i racionalnih korena.

Primer 21. Još jedan način da se definiše eksponencijalna funkcija sa osnovom e jeste da se počne od definicionog limesa za broj e . Naime, definišemo

$$(10) \quad e^x \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

pošto prethodno dokažemo da limes sa desne strane jednakosti postoji za svako $x \in \mathbf{R}$. Iz jednakosti (10), mogu se izvesti osobine eksponencijalne funkcije, na primer, da je monotono rastuća, da je $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ itd. \square

Definicija 2.8 Neka su dati realni nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ takvi da je

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 \quad \text{i} \quad \lim (b_n - a_n) = 0.$$

Familija zatvorenih intervala $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$ čije su krajnje tačke elementi nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ naziva se **familijom umetnutih intervala**¹.

Teorema 2.13 Svaka familija umetnutih intervala ima jednu i samo jednu zajedničku tačku.

Dokaz. Neka je data familija umetnutih intervala $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$. Prema definiciji 2.8, niz $\{a_n\}$ je neopadajući, a niz $\{b_n\}$ je nerastući; oba niza su ograničena brojevima a_1 i b_1 . Na osnovu teoreme 2.12, postoje konačne granične vrednosti $a = \lim a_n$ i $b = \lim b_n$. Kako je $\lim (b_n - a_n) = 0$, imamo da je $a = b$. Označimo

¹Ili familijom umetnutih segmenata.

tu zajedničku vrednost sa c . Tada je $c = \sup a_n = \inf b_n$, pa je $a_n \leq c \leq b_n$ i prema tome, tačka c pripada svim intervalima.²

Neka je d proizvoljna tačka koja pripada svim intervalima. Dokazaćemo da je $d = c$. Zaista, ako $d \in [a_n, b_n]$ za svako n , onda je d gornja granica niza $\{a_n\}$ i donja granica niza $\{b_n\}$. Kako je supremum najmanja gornja, a infimum najveća donja granica, imamo da je $d \geq c$ i $d \leq c$, odakle je $d = c$. Dakle, c je jedina zajednička tačka familije umetnutih intervala. \square

Teoremu o umetnutim intervalima koristićemo u sledećem odeljku a i kasnije na nekoliko mesta.

2.1.6 Podnizovi

Ako iz niza x_1, x_2, \dots izdvojimo beskonačno mnogo članova u istom redosledu u kome se pojavljuju u datom nizu, dobijeni niz se naziva podnizom niza $\{x_n\}$.

Na primer, ako se izdvoje članovi sa parnim indeksom, dobija se podniz $\{x_{2k}\}$. Izdvajanjem članova sa indeksom koji je prost broj dobija se takođe jedan podniz. Očigledno, svaki niz ima beskonačno mnogo podnizova.

Formalna definicija podniza je sledeća.

Definicija 2.9 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ monotono rastući niz prirodnih brojeva. Tada kažemo da je $\{x_{n_k}\}$ **podniz** niza $\{x_n\}$.

Prema definiciji 2.9, svaki niz je svoj podniz (ako uzmemo da je $\{n_k\}$ niz svih prirodnih brojeva).

Podniz $\{x_{n_k}\}$ može se posmatrati kao niz sa indeksom $k = 1, 2, \dots$. Prema tome, sve što je do sada rečeno za nizove važi i za podnizove.

Teorema 2.14 Niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $a \in \overline{\mathbf{R}}$ ako i samo ako svaki njegov podniz ima graničnu vrednost a .

Dokaz. Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je $\lim x_n = a$. Pretpostavimo najpre da je $a \in \mathbf{R}$. Neka je $\{x_{n_k}\}$ proizvoljan podniz datog niza.

Za svako dato $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takvo da je $|x_n - a| < \varepsilon$ za $n \geq n_0$. To znači da je i $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ za $n_k \geq n_0$, a kako je niz $\{n_k\}$ monotono rastući (po definiciji podniza), nejednakost $n_k \geq n_0$ ekvivalentna je sa $k \geq k_0$ za neko k_0 . Prema tome, za svako dato $\varepsilon > 0$ postoji k_0 takvo da je $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$ za $k \geq k_0$, pa je $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = a$.

U slučaju $a = \pm\infty$ dokaz je analogan.

Obrnuto tvrđenje je trivijalno tačno, jer je i niz $\{x_n\}$ jedan svoj podniz. \square

²Ovo je jedino mesto u dokazu gde je neophodno da intervali budu zatvoreni. Naime, ako su dati intervali oblika (a, b) , tada iz $a_n \leq c \leq b_n$ ne možemo zaključiti da broj c pripada svim intervalima.

Ako jedan podniz niza $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost a , to ne mora da znači da je $\lim x_n = a$. Međutim, važi sledeći rezultat (videti zadatak 269).

Teorema 2.15 *Ako se niz $\{x_n\}$ može predstaviti kao unija m svojih podnizova i ako svaki od njih ima graničnu vrednost a , tada je $\lim x_n = a$.*

Teorema 2.15 koristi se često tako što se iz konvergencije niza sa parnim i niza sa neparnim indeksima ka istoj graničnoj vrednosti a utvrđuje i konvergencija niza ka a .

Za monotone nizove dovoljno je da znamo graničnu vrednost samo jednog podniza, kao što tvrdi sledeća teorema.

Teorema 2.16 *Ako je niz $\{x_n\}$ monoton i ako jedan njegov podniz ima graničnu vrednost $a \in \overline{\mathbf{R}}$, tada je $\lim x_n = a$.*

Dokaz. Prema teoremi 2.12, svaki monoton niz ima graničnu vrednost (konačnu ili beskonačnu). To onda implicira da i svaki podniz ima istu graničnu vrednost; dakle, ako znamo da jedan podniz ima graničnu vrednost a , to je onda i granična vrednost niza. \square

Sada dajemo jednu važnu teoremu o egzistenciji konvergentnog podniza.

Teorema 2.17 Bolzano-Weierstrassov stav. *Svaki ograničen niz ima konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je niz $\{x_n\}$ ograničen. To znači da postoje realni brojevi a i b takvi da je $a \leq x_n \leq b$ za svako n .

Ako dati niz ima samo konačno mnogo različitih elemenata, onda mora postojati podniz čiji su svi elementi međusobno jednaki; ovaj podniz je konvergentan.

Pretpostavimo sada da niz $\{x_n\}$ ima beskonačno mnogo različitih elemenata. Neka je c_1 središnja tačka intervala $[a, b]$. U bar jednom od intervala $[a, c_1]$ ili $[c_1, b]$ mora se nalaziti beskonačno mnogo tačaka niza; u protivnom, niz bi imao samo konačno mnogo različitih elemenata. Ako je to interval $[a, c_1]$, uvedimo oznake $a_1 = a$, $b_1 = c_1$, a ako je to interval $[c_1, b]$ onda stavimo da je $a_1 = c_1$, $b_1 = b$. Ako oba intervala sadrže beskonačno mnogo članova niza, onda je svejedno kakav izbor pravimo. Ponovimo opisani postupak sa intervalom $[a_1, b_1]$: uzmimo njegovu središnju tačku c_2 i onaj od dva dobijena intervala koji sadrži beskonačno mnogo elemenata niza označimo sa $[a_2, b_2]$. Beskonačnim ponavljanjem ovakve konstrukcije dobijamo niz zatvorenih intervala $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$, za koje nije teško proveriti da čine familiju umetnutih intervala. Prema teoremi 2.13, ovi intervali imaju jedinstvenu zajedničku tačku c .

Konstruisaćemo sada jedan podniz niza $\{x_n\}$ koji konvergira ka c . Neka je x_{n_1} proizvoljan element datog niza koji pripada intervalu $[a_1, b_1]$. Kako interval $[a_2, b_2]$ sadrži (po konstrukciji) beskonačno mnogo elemenata datog niza, mora postojati

jedan element $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$ sa indeksom $n_2 > n_1$. Konstrukciju dalje nastavljamo analogno: ako je izabrano $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$, onda se u $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ nalazi $x_{n_{k+1}}$ sa $n_{k+1} > n_k$. ♣

Niz $\{x_{n_k}\}$ je očigledno podniz datog niza $\{x_n\}$ i za svako $k \in \mathbf{N}$ važi da je $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$. Kako je $\lim a_k = \lim b_k = c$, prema teoremi o dva žandara je i $\lim x_{n_k} = c$, pa je $\{x_{n_k}\}$ konvergentan podniz datog niza $\{x_n\}$. □

Direktna posledica BOLZANO-WEIERSTRASSOVOG stava je

Teorema 2.18 *Svaki realni niz sadrži bar jedan podniz koji ima konačnu ili beskonačnu graničnu vrednost.*

Dokaz. Ako je niz ograničen, prema teoremi 2.17 on sadrži konvergentan podniz.

Pretpostavimo da je niz $\{x_n\}$ neograničen odozgo. Tada za svaki prirodan broj k postoji beskonačno mnogo elemenata niza koji su veći od k (u protivnom bi niz imao konačan supremum, tj. maksimum). Neka je x_{n_1} proizvoljan element niza koji je veći od 1. Među elementima niza koji su veći od 2 izaberimo jedan čiji je indeks veći od n_1 ; neka je to x_{n_2} . Uopšte, ako je određen $x_{n_{k-1}}$, tada je x_{n_k} proizvoljno izabran član niza koji je veći od k i čiji je indeks n_k veći od n_{k-1} . Ovom konstrukcijom dobijamo podniz $\{x_{n_k}\}$ takav da je $x_{n_k} > k$ za svako $k \in \mathbf{N}$, pa je stoga $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Za slučaj kada je niz neograničen odozdo dokaz je sličan. □

Iz teoreme 2.14 na strani 43 *ne sleduje* da niz koji nema graničnu vrednost (neodređeno divergentan niz) mora imati podnizove koji konvergiraju ka različitim graničnim vrednostima. Naime, možda se može dogoditi da oni podnizovi koji su konvergentni konvergiraju ka istoj vrednosti, a da ostali podnizovi ne konvergiraju. Sledeća teorema tvrdi da je to nemoguće i da zaista moraju postojati podnizovi sa različitim graničnim vrednostima.

Teorema 2.19 *Ako je niz $\{x_n\}$ neodređeno divergentan, onda on sadrži bar dva podniza koja imaju granične vrednosti, ali su one različite.*

Dokaz. Neka je niz $\{x_n\}$ neodređeno divergentan. Prema teoremi 2.18 on sadrži jedan podniz $\{x_{n_k}\}$ za koji postoji $\lim x_{n_k} = a$. Tada mora postojati okolina U tačke a van koje se nalazi beskonačno mnogo članova niza $\{x_n\}$; u suprotnom bi niz $\{x_n\}$ konvergirao ka a . Od tih članova niza koji su van U može se formirati jedan niz, koji opet ima podniz, nazovimo ga $\{x_{m_k}\}$, takav da je $\lim x_{m_k} = b$. Nemoguće je da bude $a = b$, jer se svi članovi niza $\{x_{m_k}\}$ nalaze van okoline U tačke a . □ ♣

Ako je niz $\{x_n\}$ konvergentan, skup G graničnih vrednosti njegovih podnizova sastoji se od samo jednog elementa. U slučaju divergentnog niza, taj skup može sadržati konačno ili beskonačno mnogo elemenata, a sigurno je neprazan.

Primer 22. Neka je $x_n = 2 + (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Ovaj niz očigledno ima bar dva konvergentna podniza: $\{x_{2k}\}$, koji konvergira ka 3 i podniz $\{x_{2k+1}\}$, koji

konvergira ka 1. Nije teško zaključiti da svaki konvergentan podniz datog niza mora da ima za graničnu vrednost ili 1 ili 3. Prema tome, skup svih graničnih vrednosti podnizova datog niza je $G = \{1, 3\}$.

Primer 23. Kao što znamo, skup racionalnih brojeva je prebrojiv; prema tome, može se urediti u niz. Neka je $\{r_n\}$ niz svih racionalnih brojeva. Svaki realan broj (ako već nije racionalan) može se, sa proizvoljnom tačnošću, aproksimirati racionalnim brojevima. Primer takve aproksimacije je, recimo, decimalni zapis realnog broja. To znači da se u svakoj okolini proizvoljnog realnog broja x nalazi beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Koristeći se idejom iz dokaza BOLZANO-WEIERSTRASSOVOG stava, može se pokazati da postoji jedan podniz niza racionalnih brojeva koji konvergira ka x . Isto tako, postoje i podnizovi niza racionalnih brojeva koji konvergiraju ka $\pm\infty$. Dakle, skup svih graničnih vrednosti podnizova racionalnih brojeva je skup $\overline{\mathbf{R}}$. \square

Može se pokazati da skup svih graničnih vrednosti podnizova datog niza ima i minimalni i maksimalni element. Njima dajemo posebne nazive.

Definicija 2.10 Neka je $\{x_n\}$ dati niz i neka je G skup graničnih vrednosti njegovih podnizova. Najmanji element skupa G nazivamo **limes inferior** niza $\{x_n\}$ i obeležavamo sa $\underline{\lim} x_n$ ili sa $\liminf x_n$. Najveći element skupa G nazivamo **limes superior**, u oznaci $\overline{\lim} x_n$ ili $\limsup x_n$.

Limes inferior i limes superior mogu biti realni brojevi ili $\pm\infty$. Za razliku od limesa, koji ne mora postojati za svaki niz, limes superior i limes inferior uvek postoje.

Teorema 2.20 (i) Niz $\{x_n\}$ ima graničnu vrednost $c \in \overline{\mathbf{R}}$ ako i samo ako je $\underline{\lim} x_n = \overline{\lim} x_n = c$.

(ii) Za svako $\varepsilon > 0$ samo konačno mnogo članova niza $\{x_n\}$ može biti manje od $\underline{\lim} x_n - \varepsilon$ ili veće od $\overline{\lim} x_n + \varepsilon$.

(iii) Niz $\{x_n\}$ je ograničen ako i samo ako su $\underline{\lim} x_n$ i $\overline{\lim} x_n$ konačni.

Dokaz. (i) Iz definicije izlazi da je $\underline{\lim} x_n \neq \overline{\lim} x_n$ ako i samo ako postoje dva podniza niza $\{x_n\}$ koja imaju granične vrednosti, ali su one različite. Prema teoremama 2.14 i 2.19, ovo je potreban i dovoljan uslov da niz $\{x_n\}$ nema graničnu vrednost.

(ii) Dokazaćemo samo tvrđenje koje se odnosi na $\overline{\lim} x_n$. Ono je trivijalno tačno ako je $\overline{\lim} x_n = +\infty$. Neka je $\overline{\lim} x_n = M < +\infty$. Ako bi se u intervalu $(M + \varepsilon, +\infty)$ nalazilo beskonačno mnogo članova niza, onda bismo od njih mogli da sastavimo niz koji, prema teoremi 2.18, ima podniz, nazovimo ga $\{x_{m_k}\}$, takav da je $\lim x_{m_k} = b \geq M + \varepsilon$. Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da je M najveća granična vrednost nekog podniza niza $\{x_n\}$. Prema tome, samo konačno mnogo članova niza može biti veće od $\limsup x_n$.

Tvrđenje koje se odnosi na $\lim x_n$ dokazuje se analogno.

(iii) Ako je niz $\{x_n\}$ ograničen, onda je takav i svaki njegov podniz. Kako je granična vrednost ograničenog niza konačna, sleduje da su $\lim x_n$ i $\overline{\lim} x_n$ konačni.

Obrnuto, neka su $m = \lim x_n$ i $M = \overline{\lim} x_n$ konačni. Na osnovu tvrđenja (ii), za svako $\varepsilon > 0$ u intervalu $(m - \varepsilon, M + \varepsilon)$ nalaze se skoro svi članovi niza $\{x_n\}$, pa je on ograničen.

2.2 Nizovi u metričkim prostorima

2.2.1 Metrički prostor

Ispitivanje konvergencije je od interesa ne samo u skupu \mathbf{R} , već i u drugim skupovima različite prirode. U matematici i u primenjenim naukama pojavljuje se potreba za izučavanjem konvergencije u skupu kompleksnih brojeva, u višedimenzionalnim skupovima, u skupovima funkcija, kao i u skupovima sasvim apstraktne prirode. Konvergencija niza $\{x_n\}$ ka x u skupu realnih brojeva znači da su tačke x_n i x na proizvoljno malom rastojanju počevši od nekog indeksa n_0 . Ova osobina je fundamentalna za primene i može se preneti i na proizvoljne skupove ukoliko na njima definišemo rastojanje između dve tačke. Ispostavlja se da se rastojanje može definisati na različite načine, ukoliko samo zadovoljava tri uslova opisana u sledećoj definiciji.

Definicija 2.11 Neka je dat neprazan skup X i funkcija $d : X \times X \mapsto \mathbf{R}$, tako da za svako $x, y, z \in X$ važi

$$1^\circ \quad d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$2^\circ \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{simetričnost}),$$

$$3^\circ \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{nejednakost trougla}).$$

Tada kažemo da je d rastojanje ili **metrika** na skupu X , a uređeni par (X, d) nazivamo **metričkim prostorom**.

U skupovima \mathbf{R} , \mathbf{R}^2 i \mathbf{R}^3 (tj. na pravoj, u ravni ili u prostoru), rastojanje između dve tačke je dužina duži koja ih spaja:

$$d(x, y) = |x - y| \quad (\text{na pravoj}),$$

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (\text{u ravni}),$$

$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (\text{u prostoru}).$$

Osobine 1° i 2° iz definicije 2.11 lako se proveravaju. Nejednakost trougla je posledica geometrijske činjenice da je duž najkraći put između dve tačke.

Navedene metrike u \mathbf{R} , \mathbf{R}^2 i \mathbf{R}^3 nazivaju se **euklidskim metrikama** ili uobičajenim metrikama. I u skup \mathbf{R}^n za $n > 3$ može se uvesti euklidska metrika pomoću

$$d(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2}, \quad \text{za } a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n).$$

Nejednakost trougla za ovu metriku dobija se iz MINKOWSKIJEVE nejednakosti

$$(11) \quad \left(\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p},$$

koja važi za svako $p \geq 1$ i za svake dve n -torke realnih brojeva (u_1, \dots, u_n) i (v_1, \dots, v_n) (videti dokaz u zadatku 1529). Naime, ako se u nejednakosti (11) stavi $p = 2$, $u_i = a_i - b_i$, $v_i = b_i - c_i$ ($i = 1, \dots, n$), dobija se

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i - c_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n (b_i - c_i)^2 \right)^{1/2},$$

odnosno $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Kako MINKOWSKIJEVA nejednakost važi za svako $p \geq 1$, to znači da su i sve funkcije oblika

$$d(a, b) = \left(\sum_{i=1}^n |a_i - b_i|^p \right)^{1/p}$$

metrike na \mathbf{R}^n (lako se pokazuje da važe i osobine 1° i 2° iz definicije). Na primer, za $p = 1$ dobija se

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|.$$

Uobičajena metrika u skupu kompleksnih brojeva \mathbf{C} je ista kao u \mathbf{R}^2 :

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

Primetimo da je ovako uvedeno rastojanje u stvari modul razlike kompleksnih brojeva z_1 i z_2 : $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

Metrika se može uvesti i u „komplikovanim” skupovima nego što su skupovi \mathbf{R}^n ili \mathbf{C} .

Primer 24. Ako su $x = \{x_n\}$ i $y = \{y_n\}$ ograničeni nizovi, onda je i njihova razlika takođe ograničen niz. Prema tome, za dva ograničena niza $x = \{x_n\}$ i $y = \{y_n\}$ ima smisla definisati $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$. Neka je X skup svih ograničenih realnih nizova. Pokažimo da je d metrika na skupu X . Očigledno je $d(x, y) \geq 0$ za svako $x, y \in X$. Dalje, ako je $d(x, y) = 0$, onda je maksimalna vrednost $|x_n - y_n|$ jednaka nuli, što znači da je $x_n = y_n$ za svako $n \in \mathbf{N}$, pa je $x = y$. Ovim je dokazano da je

ispunjen uslov 1° iz definicije 2.11. Uslov 2° (simetričnost) je očigledno ispunjen. Dokažimo sada da važi nejednakost trougla. Neka su x, y, z proizvoljni elementi skupa X . Prema nejednakosti trougla u skupu \mathbf{R} , imamo da je

$$|x_n - z_n| \leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \quad \text{za svako } n \in \mathbf{N},$$

pa je

$$(12) \quad d(x, z) = \sup_n |x_n - z_n| \leq \sup_n (|x_n - y_n| + |y_n - z_n|).$$

Neka je $\sup_n |x_n - y_n| = U$ i $\sup_n |y_n - z_n| = V$. Tada za svako $n \in \mathbf{N}$ važi da je $|x_n - y_n| \leq U$ i $|y_n - z_n| \leq V$, odakle sleduje da je

$$(13) \quad \sup_n (|x_n - y_n| + |y_n - z_n|) \leq U + V.$$

Iz (12) i (13) izlazi da je $d(x, z) \leq U + V = d(x, y) + d(y, z)$, čime je dokazana i nejednakost trougla. Dakle, (X, d) je metrički prostor. \square

2.2.2 Okolina tačke. Otvoreni i zatvoreni skupovi

Definicija 2.12 U proizvoljnom metričkom prostoru (X, d) definišemo sledeće pojmove:

- **Kugla (ili otvorena kugla)** sa centrom u tački $a \in X$ i poluprečnikom $r > 0$ je skup

$$K_r(a) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

Zatvorena kugla je skup svih tačaka $x \in X$ za koje je $d(x, a) \leq r$.

- ε -**okolina** tačke $a \in X$ je otvorena kugla sa centrom u a i poluprečnikom $\varepsilon > 0$. **Okolina** tačke a je svaka otvorena kugla koja sadrži tačku a .

Primer 25. U skupu \mathbf{R} sa uobičajenom metrikom ($d(x, y) = |x - y|$), kugla sa centrom u a i poluprečnikom $\varepsilon > 0$ je skup svih realnih brojeva x za koje važi $|x - a| < \varepsilon$; to je, dakle, interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, a ovo je okolina tačke $a \in \mathbf{R}$ kako smo je definisali ranije (definicija 2.3 na strani 28). Prema tome, pojam okoline kako je uveden u definiciji 2.12 je generalizacija okoline u skupu \mathbf{R} .

U skupu \mathbf{R}^3 sa euklidskom metrikom kugla je „prava” kugla. U skupu \mathbf{R}^2 sa euklidskom metrikom kugla je krug.

U skupu \mathbf{C} sa uobičajenom metrikom kugla opisana oko tačke $z_0 = x_0 + iy_0$ je krug, odnosno skup svih kompleksnih brojeva $z = x + iy$ za koje važi $|z - z_0| < r$, tj. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$.

Primer 26. Ako se umesto metričkog prostora (X, d) posmatra metrički prostor (Y, d) , gde je $Y \subset X$ (a metrika je ista u oba slučaja), kugle opisane oko tačke $a \in Y$ ne moraju biti iste.

Neka je metrički prostor (X, d) definisan kao skup svih tačaka intervala $(0, 1)$, sa uobičajenom metrikom d . Kugla poluprečnika $1/3$ opisana oko tačke $1/2$ je interval $(1/6, 5/6)$, isto kao u metričkom prostoru (\mathbf{R}, d) . Međutim, kugla poluprečnika $1/3$ opisana oko tačke $5/6$ je interval $(1/2, 1)$, što je presek odgovarajuće kugle u (\mathbf{R}, d) sa skupom X . Naime, u definiciji 2.12 traži se da sve tačke kugle pripadaju skupu X .

Kao drugi primer, neka je X skup konačno mnogo realnih brojeva, na primer, $X = \{1, 2, 3\}$ i neka je d euklidska metrika. U metričkom prostoru (X, d) , kugla sa centrom u 2 i poluprečnikom $1/2$ sastoji se samo od tačke 2. Kugla sa centrom u 2 i poluprečnikom 2 je ceo skup X .

Primer 27. Za $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, neka je

$$d_s(a, b) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|, \quad d_m(a, b) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}.$$

Nije teško dokazati da su d_s i d_m metrike na \mathbf{R}^2 .

Na slici 8 prikazane su kugle poluprečnika r sa centrom u tački a u metričkim prostorima (\mathbf{R}^2, d_s) , (\mathbf{R}^2, d_m) i (\mathbf{R}^2, d_e) , gde je sa d_e označena euklidska metrika. \square

Slika 8. Kugle u različitim metrikama na skupu \mathbf{R}^2 .

Po definiciji, skup realnih brojeva je ograničen ako je $|x| < M$ za svaku tačku tog skupa i za neku konstantu $M > 0$. To znači da je ograničen svaki skup koji se može smestiti unutar nekog konačnog otvorenog intervala $(-M, M)$. Kako u skupu \mathbf{R} interval ima ulogu kugle, prirodno je uvesti sledeću definiciju.

Definicija 2.13 Skup A u metričkom prostoru je **ograničen** ako postoji neka kugla K takva da je $A \subset K$.

Primer 28. Skup svih tačaka proizvoljnog trougla u \mathbf{R}^2 je ograničen skup; jedna kugla koja ga sadrži je, na primer, unutrašnjost kružnice opisane oko trougla.

Skup svih tačaka neke prave u \mathbf{R}^3 je neograničen skup, jer ne postoji kugla konačnog poluprečnika koja sadrži celu pravu. \square

Definicija 2.14 Neka je (X, d) metrički prostor. Za skup $A \subset X$ kažemo da je **otvoren skup** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu. Skup A je **zatvoren skup** ako je njegov komplement (u odnosu na X) otvoren.

Primer 29. U metričkom prostoru (\mathbf{R}, d) , gde je d euklidska metrika, svaki otvoren interval je otvoren skup. Zaista, neka je (a, b) proizvoljan otvoreni interval i neka je x_0 proizvoljna tačka u (a, b) . Za $\varepsilon \leq \min\{x_0 - a, b - x_0\}$, interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ pripada skupu (a, b) . Prema tome, za svaku tačku $x_0 \in (a, b)$ postoji okolina koja se sadrži u (a, b) , što znači da je (a, b) otvoren skup.

Zatvoreni interval $[a, b]$ je zatvoren skup. To se pokazuje tako što se dokaže da je njegov komplement otvoren. Uzmimo proizvoljnu tačku $x_0 \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Ako $x_0 \in (-\infty, a)$, tada interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ pripada skupu $(-\infty, a)$ za $\varepsilon \leq a - x_0$. Ako $x_0 \in (b, +\infty)$, interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ pripada skupu $(b, +\infty)$ za $\varepsilon \leq x_0 - b$. Iz ovoga proizilazi da je skup $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ otvoren, pa je skup $[a, b]$ zatvoren.

I u proizvoljnom metričkom prostoru (X, d) svaka otvorena kugla je otvoren skup, a svaka zatvorena kugla je zatvoren skup (videti zadatak 1069). !

Primer 30. Skup u metričkom prostoru ne mora biti ni otvoren ni zatvoren. Na primer, interval oblika $(a, b]$ nije ni otvoren ni zatvoren u skupu \mathbf{R} sa euklidskom metrikom.

Postoje li skupovi koji su i otvoreni i zatvoreni? Iz definicije 2.14 sleduje da su takvi skupovi \emptyset i X u svakom metričkom prostoru (X, d) . Naime, prazan skup je otvoren jer ne sadrži ni jednu tačku, pa je uslov definicije formalno ispunjen. Ceo skup X je otvoren jer sadrži svaku okolinu svake svoje tačke. Kako je prazan skup komplement skupa X , iz otvorenosti skupa X sleduje zatvorenost skupa \emptyset , a iz otvorenosti skupa \emptyset izlazi zatvorenost skupa X . \square

Kao što smo videli, na istom skupu X mogu se definisati različite metrike. Za materiju koja sledi važan je pojam ekvivalentnosti metrika.

Definicija 2.15 Za metrike d_1 i d_2 na istom skupu X kažemo da su **ekvivalentne** ako svaka okolina proizvoljne tačke $a \in X$ u metrici d_1 sadrži neku okolinu tačke a u metrici d_2 i obrnuto.

Neposredno iz definicije 2.15 sleduje da je ekvivalentnost metrika relacija ekvivalencije u skupu svih metrika na skupu X .

Primer 31. Kako se u svaki krug sa centrom u tački $a \in \mathbf{R}^2$ može upisati kvadrat sa centrom u istoj tački i obrnuto, u svaki kvadrat se može upisati krug, zaključujemo da su metrike d_m i d_s definisane u primeru 27 ekvivalentne sa euklidskom metrikom d_e , pa su i međusobno ekvivalentne.

Teorema 2.21 *Ako su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike na skupu X i ako je skup $A \subset X$ otvoren (zatvoren) u metričkom prostoru (X, d_1) , onda je A otvoren (zatvoren) i u (X, d_2) .*

Dokaz. Neka je A otvoren skup u (X, d_1) i neka je a proizvoljna tačka skupa A . Tada postoji okolina U tačke a takva da je $U \subset A$. Kako su metrike d_1 i d_2 ekvivalentne, postoji okolina V tačke a u metrici d_2 koja se sadrži u U , pa imamo da je $V \subset U \subset A$. Prema tome, skup A sadrži i neku okolinu svake svoje tačke i u metrici d_2 , pa je otvoren i u metričkom prostoru (X, d_2) . Tvrdjenje koje se odnosi na zatvorene skupove dokazuje se preko komplementa.

2.2.3 Konvergencija nizova u metričkim prostorima

Niz $\{x_n\}$ u proizvoljnom skupu X definiše se, analogno realnom nizu, kao preslikavanje koje svakom prirodnom broju pridružuje jedan element x_n skupa X . I definicija konvergentnog niza u metričkom prostoru (X, d) analogna je definiciji koju smo dali u 2.1.1:

Definicija 2.16 *Niz $\{x_n\}$ u metričkom prostoru (X, d) konvergira ka $a \in X$, u oznaci $\lim x_n = a$, ako se u svakoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza. Ekvivalentno, niz $\{x_n\}$ konvergira ka a ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) \quad d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Za niz koji konvergira ka nekoj tački $a \in X$ kažemo da je konvergentan. Ako ne postoji $a \in X$ tako da je $\lim x_n = a$, kažemo da je niz $\{x_n\}$ divergentan.

Zadržavajući terminologiju iz konvergencije realnih nizova, element $a \in X$ takav da je $\lim x_n = a$ zvaćemo graničnom vrednošću niza $\{x_n\}$.

U proizvoljnom metričkom prostoru ne mora da postoji relacija poretka, pa se u opštem slučaju ne definiše pojam beskonačnosti. To znači da se ne razmatraju određeno divergentni nizovi kao u \mathbf{R} . Ni pojam monotonog niza ovde nema smisla.

Ispitivanje konvergencije niza u metričkom prostoru može se svesti na ispitivanje konvergencije realnih nizova, jer je očigledno

!

$$\lim x_n = a \iff \lim d(x_n, a) = 0,$$

a niz $\{d(x_n, a)\}$ je realan i nenegativan.

Jedna slična, ali manje očigledna osobina data je u sledećoj teoremi.

Teorema 2.22 *Ako je $\lim x_n = a$ tada je $\lim d(x_n, b) = d(a, b)$, gde je b proizvoljna tačka skupa X .*

Dokaz. Kako je, prema nejednakosti trougla, $d(x_n, b) \leq d(x_n, a) + d(a, b)$, imamo da je $d(x_n, b) - d(a, b) \leq d(x_n, a)$. Na isti način, iz $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b)$ dobijamo $d(x_n, b) - d(a, b) \geq -d(a, x_n)$, što znači da je

$$|d(x_n, b) - d(a, b)| \leq d(x_n, a),$$

pa kako je $\lim d(x_n, a) = 0$, zaključujemo da i $|d(x_n, b) - d(a, b)|$ teži nuli. \square

Konvergencija niza zavisi od toga u kom metričkom prostoru ga posmatramo. Na primer, niz $\{1/n\}$ konvergentan je u (\mathbf{R}, d) , gde je \mathbf{R} skup realnih brojeva, a d euklidska metrika; ali nije konvergentan u (X, d) , gde je $X = (0, 1)$, jer se u definiciji zahteva da i granična vrednost pripada skupu X , a to ovde nije slučaj.

Konvergencija niza zavisi i od metrike. Može se dogoditi da niz $\{x_n\}$ konvergira ka a u jednoj metrici, a da ne konvergira u nekoj drugoj.

Primer 32. Uvedimo u skup \mathbf{R} metriku definisanu sa

$$d(x, y) = 1 \quad \text{ako } x \neq y, \quad d(x, x) = 0.$$

Niz $x_n = 1/n$ konvergira u euklidskoj metrici ka nuli, ali u uvedenoj metrici uopšte nije konvergentan, jer je $d(x_n, a) = 1$ za svako n , ili, ako postoji $n_0 = 1/a$ onda za svako $n > n_0$. \square

Ako su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike, situacija opisana u prethodnom primeru nije moguća.

Teorema 2.23 Neka su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike na skupu X i neka je $\{x_n\}$ niz elemenata skupa X . Ako je $\lim x_n = a$ u metrici d_1 , tada je $\lim x_n = a$ i u metrici d_2 .

Dokaz. Neka je $\lim x_n = a$ u metrici d_1 . Uzmimo proizvoljnu okolinu V tačke a u metrici d_2 . Zbog ekvivalentnosti metrika d_1 i d_2 , postoji okolina U tačke a u metrici d_1 , takva da je $U \subset V$. Kako okolina U sadrži skoro sve članove niza $\{x_n\}$, isto važi i za okolinu V , pa je $\lim x_n = a$ i u metrici d_2 . \square

Ako na istom skupu X imamo više ekvivalentnih metrika, onda je, na osnovu teoreme 2.23, svejedno koja se od njih koristi pri proveru konvergencije datog niza. Ova činjenica može znatno da olakša ispitivanje konvergencije.

Konvergencija višedimenzionalnog niza

U prostoru \mathbf{R}^2 sa euklidskom metrikom, posmatrajmo niz tačaka čije su Dekartove koordinate (x_n, y_n) . U primeru 31 dokazano je da je euklidska metrika ekvivalentna metrici d_m definisanoj sa $d_m((x, y), (a, b)) = \max\{|x - a|, |y - b|\}$.

Prema definiciji konvergencije, niz $\{(x_n, y_n)\}$ konvergira ka tački (a, b) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takvo da je

$$d_e((x_n, y_n), (a, b)) = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \leq \varepsilon \quad \text{za } n \geq n_0,$$

odnosno ako se skoro sve tačke (x_n, y_n) nalaze unutar kruga poluprečnika ε sa centrom u (a, b) .

Zamenom euklidske metrike sa ekvivalentnom metrikom d_m , nalazimo da (x_n, y_n) konvergira ka (a, b) ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji n_0 takvo da za $n \geq n_0$ važi da je $\max\{|x_n - a|, |y_n - b|\} < \varepsilon$, ili, što je isto, ako i samo ako za $n \geq n_0$ važe obe nejednakosti $|x_n - a| < \varepsilon$ i $|y_n - b| < \varepsilon$. Odavde se vidi da niz $\{(x_n, y_n)\}$ konvergira ka (a, b) ako i samo ako je $\lim x_n = a$ i $\lim y_n = b$.

Uopšte, u prostoru \mathbf{R}^n , nije teško dokazati da je metrika

$$d_m((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

ekvivalentna euklidskoj metrici. Na isti način kao u dvodimenzionalnom slučaju odavde proizilazi da niz tačaka prostora \mathbf{R}^n konvergira ka nekoj tački tog prostora ako i samo ako nizovi odgovarajućih koordinata konvergiraju.

Konvergencija niza kompleksnih brojeva

Skup \mathbf{C} kompleksnih brojeva može se posmatrati kao skup uređenih parova (x, y) , gde su x, y realni i imaginarni deo kompleksnog broja z . Ako se u skup \mathbf{C} uvede euklidska metrika

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|, \quad z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

pitanja u vezi sa konvergencijom niza kompleksnih brojeva rešavaju se isto kao u \mathbf{R}^2 . Prema tome, niz kompleksnih brojeva $\{z_n\}$ konvergira ka $z = x + iy$ ako i samo ako je $\lim \operatorname{Re} z_n = x$ i $\lim \operatorname{Im} z_n = y$.

Primer 33. Neka je $z_n = \frac{1}{n} + i\frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Kako je $\lim \operatorname{Re} z_n = 0$ i $\lim \operatorname{Im} z_n = 1$, dati niz konvergira ka broju i . \square

U kompleksnom domenu mogu se pojaviti neočekivane komplikacije u naizgled jednostavnim problemima, kao što se vidi i iz sledećeg primera.

Primer 34. Posmatrajmo geometrijski niz $z_n = q^n$ sa kompleksnim količnikom $q = a + ib$.

Za $|q| < 1$, imamo da je $|q^n| = |q|^n \rightarrow 0$, pa dati niz konverira ka nuli.

Ako je $|q| > 1$, tada realni niz $|q^n|$ teži beskonačnosti. Odavde sleduje da dati niz nije konvergentan. Zaista, za svaki kompleksan broj z imamo da je $|z_n - z| \geq ||q^n| - |z|| \rightarrow +\infty$ kad $n \rightarrow +\infty$. Kako je $\lim z_n = z$ ako i samo ako je $\lim |z_n - z| = 0$, zaključujemo da u ovom slučaju niz $\{z_n\}$ nije konvergentan.

Ostaje još slučaj $|q| = 1$, odnosno $q = \cos \alpha + i \sin \alpha$ za neko $\alpha \in [0, 2\pi)$. U ovom slučaju je $z_n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$, pa je dati niz konvergentan ako i samo ako

su nizovi $\{\cos n\alpha\}$ i $\{\sin n\alpha\}$ konvergentni. Pokazaćemo da je to moguće samo za $\alpha = 0$, tj. za $q = 1$.

Neka je $\lim \sin n\alpha = c$. Tada je, za svako fiksirano $k \in \mathbf{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(n+k)\alpha - \sin n\alpha) = 0, \quad \text{odnosno}$$

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin n\alpha \cos k\alpha + \cos n\alpha \sin k\alpha - \sin n\alpha) = 0.$$

Ako je $c = 0$, onda je $\lim \cos n\alpha = 1$, pa iz (14) dobijamo da je $\sin k\alpha = 0$ za svako k , odakle je $\alpha = 0$ ili $\alpha = \pi$ (u intervalu $[0, 2\pi)$).

Ako je $c \neq 0$, iz (14) dobijamo da je

$$c \lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos k\alpha + \operatorname{ctg} n\alpha \sin k\alpha - 1) = 0,$$

pa je, za $\sin k\alpha \neq 0$,

$$\lim \operatorname{ctg} n\alpha = \operatorname{ctg} k\alpha.$$

Zbog jedinstvenosti granične vrednosti, iz poslednje relacije zaključujemo da, ako je $\sin \alpha \neq 0$ i $\sin 2\alpha \neq 0$, onda je $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha$, a ovo je nemoguće, što nije teško videti.

Prema tome, ako za neko $\alpha \in [0, 2\pi)$ postoji $\lim \sin n\alpha = c$, onda je $c = 0$ i $\alpha = 0$ ili $\alpha = \pi$. Za $\alpha = \pi$, niz $\cos n\alpha = (-1)^n$ nije konvergentan, pa je kompleksni niz $\cos n\alpha + i \sin n\alpha$ konvergentan samo za $\alpha = 0$, odnosno za $q = 1$.

Dakle, geometrijski niz sa kompleksnim količnikom q je konvergentan za $|q| < 1$ i za $q = 1$, a divergentan je za ostale kompleksne vrednosti q .

2.2.4 Tačke nagomilavanja

Definicija 2.17 Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subset X$. Tačka a je **tačka nagomilavanja** skupa A ako se u svakoj okolini tačke a nalazi bar jedna tačka skupa A različita od a .

Ako $a \in A$ nije tačka nagomilavanja skupa A , kažemo da je to **izolovana tačka** skupa A .

Primer 35. Prema definiciji 2.17, tačka nagomilavanja ne mora da pripada skupu. Na primer, 0 je tačka nagomilavanja intervala $(0, 1)$, iako ne pripada tom intervalu, jer se u svakoj okolini nule $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ nalaze tačke intervala $(0, 1)$.

Skup $\{1, 2, 3\}$ nema tačaka nagomilavanja u euklidskoj metrici; sve njegove tačke su izolovane. U stvari, konačan skup u proizvoljnom metričkom prostoru nema tačaka nagomilavanja. !