

Predgovor

Treće izdanje ovog udžbenika izlazi posle šest godina njegove upotrebe u nastavi Matematike 2 na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu. Od februara 1996, kada se prvi put pojavila, do juna 2002, ova knjiga bi trebalo da ima sedam akademskih godina da nije bila zabranjena za upotrebu studentima 2000. godine, u mračnom periodu ETF-a, koga se nerado sećamo. Međutim, upravo u tom vremenu, pokazalo se da studenti istinski vole ovaj udžbenik, jer je i pored zabrane, njegova prodaja opala samo neznatno. U tom vremenu, mnogi su zbog korišćenja ove knjige pali na ispitu. Nove čitaoce i korisnike upozoravam da u ovoj knjizi, osim matematike, nema (a nije ni bilo) ničeg drugog, što bi moglo da izazove radoznalost potencijalnog cenzora.

U ovom izdanju, ispravljene su sve uočene štamparske i druge greške, a dokazi nekih teorema su izmenjeni, čime su postali jednostavniji i lakši. Ova knjiga čini celinu sa mojom knjigom *Matematička analiza – pregled teorije i zadaci*, treće izdanje, Beograd 2001, koja sadrži 1688 zadataka i kratak pregled teorije.

U Beogradu, 9. avgusta 2002. godine

Milan Merkle
emerkle@kondor.etf.bg.ac.yu

Iz predgovora prvom izdanju

Od inženjera koji primenjuje matematiku više se ne traži da rutinski rešava najkomplikovanije integrale i slične probleme za koji je potreban tradicionalni „dril”. Ova obaveza je nestala pojavom računarskih programa koji rešavaju većinu šablonskih problema i to u „opštem obliku”. Međutim, današnji i budući inženjeri moraće da poznaju više matematike nego nekada, jer su mnoge nove oblasti Matematike našle primenu u inženjerskim naukama. Ne samo da se traži poznavanje nove matematike, nego je promenjen i kvalitet potrebnog znanja ka uravnoteženijoj mešavini teorijskih znanja i praktičnih veština. Da bi mogao da se osloni na računar, inženjer mora da zna dosta teorije, da poznaje principe i ideje i da zna da formuliše problem na jeziku matematike.

Dobar deo materije koja se izlaže u ovoj knjizi pripada klasičnoj Matematičkoj analizi. Ima već preko 300 godina od otkrića NEWTONA i LEIBNIZA, koja su, naravno, dopunjavana otkrićima drugih matematičara. Od pojave prvog udžbenika matematičke analize, kojeg je J. BERNOULLI napisao za svog slavnog učenika, markiza F. L'HOSPITALA, do danas su svakako napisane hiljade udžbenika. Iako je gradivo koje se u njima izlaže odavno postalo klasično, selekcija materije i način prezentovanja sadrže u sebi i obeležje vremena u kome je knjiga nastala. Po tome ni ova knjiga nije izuzetak.

Preskočili smo ili smo samo površno obradili neke oblasti koje se rade rutinski primenom računara. Na primer, geometrijske primene integrala smo sasvim površno izložili, jer se budući inženjer ili time neće baviti ili će rešavati probleme iz te oblasti pomoću računara. Nasuprot tome, TAYLORova formula je detaljno obrađena, jer je ona od fundamentalne važnosti u inženjerskim primenama i smatramo da student mora da zna teorijske detalje da bi razumeo primenu. Kroz mnogobrojne primere (u knjizi ih ukupno ima 193) uvodimo čitaoca u neposredne primene izložene teorije, sa posebnim osvrtima na numeričke rezultate, kad god je to bilo moguće.

Međutim, izbor materijala i koncepcija knjige nisu striktno uslovljeni neposrednim ili budućim primenama. Izučavanje Matematičke analize ima za cilj i upoznavanje sa fundamentalnim idejama. Dokazi mnogih teorema su ilustracija suptilnosti metoda kojima se služi Matematička analiza i čitaju se sa zadovoljstvom. Iako su neki dokazi previše komplikovani da bi se mogli predavati u uvek prenapregnutim okvirima standardnog kursa, smatrali smo da bi znatizeljniji čitaoci bili uskraćeni njihovim izostavljanjem.

Materijal o funkcijama više promenljivih i o kompleksnim funkcijama je površnije iznet od ostalih delova. Njegova uloga u tekstu jeste da ilustruje snagu unificiranog pristupa pomoću aparata metričkih prostora i da ostvari prvi kontakt studenata sa ovom problematikom.

Iako sam kao autor isključivo odgovoran za sadržaj knjige, na njenu koncepciju su uticali i stavovi mojih kolega sa katedre za Primenjenu matematiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, kao i brojne diskusije u vezi sa izvođenjem nastave.

Profesori ILIJA LAZAREVIĆ, STOJAN RADENOVIĆ, SLOBODAN SIMIĆ i DOBRILLO TOŠIĆ, pročitali su radnu verziju teksta i dali mi niz izvanredno korisnih primedbi i sugestija, koje su ugrađene u konačnu verziju.

Ilustracije u tekstu urađene su na računaru, u čemu mi je pomogao dipl. ing. IVAN FIŠER. Korice je oblikovao arh ZORAN BADNJEVIĆ. Poslednji i najvažniji deo posla u nastajanju knjige obavilo je osoblje štamparije Tehnološkog fakulteta u Beogradu. Svima zahvaljujem na uspešnoj saradnji.

Sadržaj

Oznake.....	<i>x</i>
1 Uvod u analizu	1
1.1 Kardinalni broj skupa	2
1.2 Realni i kompleksni brojevi.....	4
1.2.1 Realni brojevi (14) 1.2.2 Kompleksni brojevi (7) 1.2.3 Neke nejed-	
nakosti (9)	
1.3 Realne i kompleksne funkcije	12
1.3.1 Pregled osnovnih pojmova (12) 1.3.2 Neke klase realnih funkcija (14)	
1.3.3 Kompleksne funkcije (23)	
2 Granični procesi.....	25
2.1 Realni nizovi	26
2.1.1 Definicija i osnovni pojmovi (26) 2.1.2 Osobine konvergentnih nizova	
(29) 2.1.3 Beskonačne granične vrednosti (33) 2.1.4 Dve teoreme o nizovima	
(35) 2.1.5 Monotoni nizovi (38) 2.1.6 Podnizovi (43)	
2.2 Nizovi u metričkim prostorima.....	47
2.2.1 Metrički prostor (47) 2.2.2 Okolina tačke. Otvoreni i zatvoreni skupovi	
(49) 2.2.3 Konvergencija nizova u metričkim prostorima (52) 2.2.4 Tačke	
nagomilavanja (55) 2.2.5 Kompletanost (57) 2.2.6 Banachov stav o nepokret-	
noj tački (60) 2.2.7 Kompaktnost (64) 2.2.8 Normirani prostor (67)	
2.3 Granične vrednosti realnih funkcija.....	68
2.3.1 Definicija i osnovni pojmovi (68) 2.3.2 Osobine neprekidnih	
funkcija (79)	
2.4 Preslikavanja metričkih prostora	81
2.4.1 Opšta definicija i posebni slučajevi (81) 2.4.2 Neprekidni operatori na	
kompaktnim skupovima. Uniformna neprekidnost (85)	
2.5 Beskonačno male veličine i njihovo poređenje	88

3 Diferencijalni račun	95
3.1 Izvod funkcije realne promenljive	96
3.1.1 Problem tangente i definicija izvoda (96)	
3.1.2 Formalizam diferenciranja (100)	
3.1.3 Diferencijal (104)	
3.2 Teoreme o srednjoj vrednosti u diferencijalnom računu	108
3.3 Primene teorema o srednjoj vrednosti	113
3.3.1 Monotonost funkcija (113)	
3.3.2 Prekidi izvoda (115)	
3.3.3 Uniformna neprekidnost (117)	
3.3.4 Kontrakcija i Lagrangeova teorema (118)	
3.3.5 L'Hospitalovo pravilo (119)	
3.4 Izvodi i diferencijali višeg reda	121
3.4.1 Izvod reda n (121)	
3.4.2 Diferencijal reda n (123)	
3.4.3 Konveksnost i drugi izvod (124)	
3.5 Taylorova formula	128
3.5.1 Taylorov polinom i ostatak (128)	
3.5.2 Nalaženje Taylorovih razvoja funkcija (131)	
3.5.3 Procena ostatka u Taylorovoj formuli (136)	
3.5.4 Primena Taylorove formule na ispitivanje ekstremuma (142)	
3.6 Ispitivanje funkcija	143
3.6.1 Asimptote (143)	
3.6.2 Postupak ispitivanja funkcija (146)	
3.7 Diferencijalni račun funkcija više promenljivih	148
3.7.1 Diferencijabilnost funkcija više promenljivih (148)	
3.7.2 Parcijalni izvodi višeg reda (152)	
3.8 Diferencijalni račun kompleksnih funkcija	153
4 Integralni račun	157
4.1 Problem izračunavanja površine i definicija integrala	158
4.2 Određeni integral	163
4.2.1 Integrabilne funkcije (163)	
4.2.2 Osobine integrala (168)	
4.3 Primitivna funkcija i neodređeni integral	172
4.3.1 Definicija primitivne funkcije (172)	
4.3.2 Veza između određenog i neodređenog integrala (173)	
4.3.3 Osobine neodređenog integrala i metodi integracije (175)	
4.4 Nesvojstveni integral	178
4.5 Integracija nekih klasa funkcija	181
4.5.1 Racionalne funkcije (182)	
4.5.2 Neke „iracionalne“ funkcije (183)	
4.5.3 Trigonometrijske funkcije (185)	
4.5.4 Integrali koji nisu elementarne funkcije (186)	

4.6 Dužina luka krive i ostale primene.....	187
4.6.1 Dužina luka krive (187) 4.6.2 Ostale primene (189)	
5 Redovi.....	193
5.1 Uvod i osnovni pojmovi.....	194
5.2 Pozitivni redovi.....	200
5.3 Redovi sa proizvoljnim članovima.....	209
5.3.1 Alternativni redovi (209) 5.3.2 Redovi sa opštim članom oblika $a_n b_n$ (211) 5.3.3 Apsolutna konvergencija (213)	
5.4 Funkcionalni redovi.....	216
5.4.1 Uvod (216) 5.4.2 Uniformna konvergencija nizova funkcija (216)	
5.4.3 Uniformna konvergencija redova (224)	
5.5 Stepeni redovi.....	228
5.5.1 Definicija i osnovne osobine (228) 5.5.2 Maclaurinovi redovi (234)	
5.5.3 Kompleksni stepeni redovi (237)	
6 Diferencijalne jednačine.....	239
6.1 Uvodni pojmovi i diferencijalne jednačine prvog reda.....	240
6.1.1 Uvodni pojmovi (240) 6.1.2 Jednačina koja razdvaja promenljive (243)	
6.1.3 Homogena jednačina (244) 6.1.4 Linearna jednačina prvog reda (246)	
6.1.5 Bernoullijeva jednačina (248) 6.1.6 Jednačine Lagrangea i Clairauta (249) 6.1.7 Riccatijeva jednačina (251) 6.1.8 Jednačina u totalnom diferen- cijalu (252)	
6.2 Linearne diferencijalne jednačine višeg reda.....	255
6.2.1 Homogena jednačina (255) 6.2.2 Nehomogena jednačina (260)	
6.2.3 Jednačina sa konstantnim koeficijentima (263) 6.2.4 Eulerova diferen- cijalna jednačina (268)	
6.3 Nepotpune jednačine.....	268
Registar imena.....	271
Registar pojmova.....	273

Oznake

! Važno (na margini). Označava važne formule i tvrđenja.

! Klizavo (na margini). Ovim znakom obeležavaju se mesta gde se lako i često greši.

♣ Ideja (na margini). Ovim znakom obeležavamo mesta na kojima se u zadacima uvodi nova ideja.

□ Znak za kraj dokaza, teoreme, definicije ili rešenja.

N Skup prirodnih brojeva.

Q Skup racionalnih brojeva.

Z Skup celih brojeva.

R Skup realnih brojeva.

C Skup kompleksnih brojeva.

∅ Prazan skup.

$\{x | P(x)\}$ Skup svih x (iz nekog skupa) koji imaju osobinu P . Na primer, $\{x | 1 < x < 2\}$ je skup svih brojeva između 1 i 2.

(a, b) Interval (otvoreni interval), skup $\{x | a < x < b\}$.

$[a, b]$ Segment (zatvoreni interval), skup $\{x | a \leq x \leq b\}$.

$(a, b]$ Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup $\{x | a < x \leq b\}$.

$[a, b)$ Poluotvoreni (poluzatvoreni) interval, skup $\{x | a \leq x < b\}$.

$x \mapsto f(x)$ Oznaka za funkciju koja x preslikava u $f(x)$, na primer, funkcija $x \mapsto \sin x$.

$[x]$ Ceo deo broja x . Na primer, $[3.67] = 3$, $[-8.01] = -9$. Simbol $[\cdot \cdot \cdot]$ u tekstu označava samo ovu funkciju i ne koristi se u značenju zagrada.

$\operatorname{sgn} x$ Znak broja x , signum. Ako je $x > 0$, tada je $\operatorname{sgn} x = 1$, za $x < 0$ je $\operatorname{sgn} x = -1$ i $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

NZS (m, n) Najmanji zajednički sadržalac prirodnih brojeva m i n .

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)$.

$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)$.

$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}$, $a \in \mathbf{R}$.

Ostale matematičke oznake objašnjene su na mestu gde se po prvi put pojavljuju.

Brojevi zadataka na koje se pozivamo u tekstu odnose se na knjigu: Milan Merkle, Matematička analiza – pregled teorije i zadaci, treće izdanje, Beograd 2001.