

## 9.1 Testovi hipoteza u statistici

Popularan metod dokazivanja teorema u matematici je *deductio ad absurdum*, dovođenje do protivrečnosti ako se pretpostavi suprotno tvrđenje. U većini oblasti u kojima se primenjuje statistika nije moguće izvesti rigorozan dokaz, ali metod dovođenja do protivrečnosti je u suštini osnova statističkog dokaza. U statistici se, za razliku od matematike, apsolutna protivrečnost retko može pojaviti.

Pretpostavimo, na primer, da smo iz 20 bacanja novčića dobili 18 pisama. Ovo nije apsolutni dokaz da novčić nije "fer", naime nije nemoguće da se takav rezultat dobije sa novčićem kod koga je verovatnoća pisma  $p = 1/2$ . Ali, iz iskustva znamo da se takav ili sličan rezultat retko može dobiti sa „fer“ novčićem; ovakav rezultat eksperimenta nam daje jake dokaze protiv hipoteze  $p = 1/2$ , a u korist hipoteze  $p > 1/2$ . Zadatak statističke teorije testiranja hipoteza jeste da kvantifikuje stepen sumnje u neku hipotezu. Recimo, u navedenom primeru, 10 ili 11 pisama ne bi izazvalo sumnju u hipotezu da je  $p = 1/2$ , dok 18 ili više pisama sigurno daje osnova za odbacivanje te hipoteze kao malo verovatne. Gde je granica između prihvatanja i odbacivanja? Da li je to 13,14,15?

Sličan problem pojavljuje se u raznim situacijama kada biramo između dve hipoteze, nazovimo ih  $H_0$ -**nulta hipoteza** i  $H_1$ -**alternativna hipoteza**. Izbor između dve hipoteze pojavljuje se u različitim oblastima primene, u stvari kad god treba dokazati neko tvrđenje ili verifikovati neku novu teoriju. Na primer, ako se pojavi novi lek, proizvođač mora dokazati da je on bolji od postojećih. Da bi dokazao tu hipotezu, on mora da obori suprotnu hipotezu.

Ako želimo da dokažemo neko tvrđenje, onda suprotno tvrđenje (ili neutralno ili postojeće stanje) uzimamo za nultu hipotezu  $H_0$ , a samo tvrđenje za hipotezu  $H_1$ .

Cilj postupka testiranja jeste da se ispita, na osnovu rezultata eksperimenta, ima li dokaza protiv hipoteze  $H_0$ , a u korist hipoteze  $H_1$ .

Test je određen ako je definisana statistika  $S$  (**statistika testa**) i skup vrednosti za  $S$  za koje odbacujemo hipotezu  $H_0$  (**oblast odbacivanja** ili **kritična oblast**).

Zaključak testa može biti jedan od sledeća dva:

- Odbacujemo  $H_0$ , jer smo u eksperimentu dobili  $S$  u oblasti odbacivanja. Kao objašnjenje nudimo hipotezu  $H_1$ .
- Ne odbacujemo  $H_0$  jer je vrednost za  $S$  u eksperimentu bila van oblasti odbacivanja. Nemamo dokaza protiv  $H_0$ .

**Primer 154.** U slučaju testiranja novčića, možemo formulisati hipoteze:

$$H_0 : p = \frac{1}{2}, \quad H_1 : p > \frac{1}{2},$$

gde je  $p$  verovatnoća padanja pisma. Za statistiku testa uzimamo broj pisama ( $S$ ) u 20 bacanja novčića. Neka je oblast odbacivanja  $\{S \geq 16\}$ . Ovim je definisan jedan test hipoteze  $H_0$  protiv alternativne hipoteze  $H_1$ . Hipoteza  $H_0$  biće odbačena (u korist hipoteze  $H_1$ ) ako dobijemo 16 ili više pisama; u protivnom neće biti odbačena. Primitimo da  $H_0$  neće biti odbačena ni ako je  $S = 2$ , mada je ovo događaj koji izaziva sumnju u  $H_0$ , ali svakako ne u korist  $H_1$ . U ovom primeru test bi ostao isti ako bismo za  $H_0$  uzeli  $p \leq 1/2$ .  $\square$

Pri testiranju hipoteza moguće su dve vrste grešaka:

- **Greška prve vrste** nastaje ako se  $H_0$  odbaci kada je  $H_0$  tačna.
- **Greška druge vrste** nastaje ako se  $H_0$  ne odbaci kada je  $H_1$  tačna.

S obzirom na interpretaciju hipoteza  $H_0$  i  $H_1$ , obično nam je važnije da ne napravimo grešku prve vrste, jer bismo tim postupkom dokazali tvrdjenje koje nije tačno (hipoteza  $H_1$ ). Greška druge vrste nije toliko značajna, jer ako nemamo dovoljno jakih dokaza protiv  $H_0$ , a verujemo da je  $H_1$  ipak tačna, postupak dokazivanja hipoteze  $H_1$  možemo nastaviti izvođenjem novih obimnijih eksperimenata.

Kada testiramo hipotezu o nekom parametru  $\theta$ , skup mogućih vrednosti  $\Theta$  sadrži dva podskupa  $\Theta_0$  i  $\Theta_1$ , koji su određeni hipotezama  $H_0$  i  $H_1$ . U primeru 154 imamo da je  $\Theta = [0, 1]$ ,  $\Theta_0 = \{1/2\}$ ,  $\Theta_1 = (1/2, 1]$ . Da smo u primeru 154 definisali  $H_0 : p \leq 1/2$ , imali bismo da je  $\Theta_0 = [0, 1/2]$ , pa bi oblasti  $\Theta_0$  i  $\Theta_1$  bile komplementarne, kao što je često slučaj.

Greške prve i druge vrste zavise od  $\theta$ . Uvedimo sledeće oznake i definicije:

Neka je  $\theta \in \Theta$  prava vrednost parametra.

- Verovatnoća da će nulta hipoteza biti odbačena je **moć testa**, u oznaci  $\gamma(\theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ . Ako je  $C$  oblast odbacivanja  $H_0$ , a  $S$  statistika testa, onda je  $\gamma(\theta) = P(S \in C)$ .
- Verovatnoću greške prve vrste označavamo sa  $\alpha(\theta)$ . Ona je definisana samo za  $\theta \in \Theta_0$ , jer se greška prve vrste može napraviti samo kada je  $H_0$  tačna. Očigledno je  $\alpha(\theta) = \gamma(\theta)$  za  $\theta \in \Theta_0$  (verovatnoća da će  $H_0$  biti odbačena).
- Verovatnoću greške druge vrste obeležavamo sa  $\beta(\theta)$ ,  $\theta \in \Theta_1$ . Imamo da je  $\beta(\theta) = 1 - \gamma(\theta)$  za  $\theta \in \Theta_1$  (verovatnoća da  $H_0$  neće biti odbačena).
- Maksimalna vrednost greške prve vrste je **nivo značajnosti testa** i obeležava se sa  $\alpha$ :  $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \alpha(\theta)$ .
- Ako je oblast odbacivanja testa oblika  $\{S > c\}, \{S \geq c\}, \{S < c\}$  ili  $\{S \leq c\}$ , za broj  $c$  kažemo da je **kritična vrednost testa**.

Idealan test ima male greške i prve i druge vrste. Međutim, to su protivrečni zahtevi. Neka je, na primer, kritična oblast definisana sa  $\{S \geq c\}$ . Tada je

$$\alpha(\theta) = P(S \geq c), \quad (\theta \in \Theta_0), \quad \beta(\theta) = 1 - P(S \geq c) = P(S < c), \quad (\theta \in \Theta_1).$$

Sa fiksiranim uzorkom i statistikom testa, jedini način da smanjimo  $\alpha(\theta)$  jeste da povećamo  $c$ , ali tako povećavamo  $\beta(\theta)$ . Zato se obično kritična vrednost  $c$  bira tako da nivo značajnosti bude ispod zadate vrednosti, čime se kontroliše greška prve vrste  $\alpha(\theta)$ . Međutim, ako možemo da biramo između dva testa sa istim nivoom značajnosti, izabraćemo onaj koji daje manju grešku druge vrste.

Za veličinu nivoa značajnosti se obično uzimaju standardne vrednosti 0.1, 0.05, 0.01. Standardan izbor je konvencija koje se ne moramo pridržavati, ali omogućava poređenje različitih rezultata, a i olakšava izračunavanja, jer se mogu koristiti standardne tablice.

**Primer 155.** Brašno se prodaje u pakovanjima nominalne mase 1kg. Na zahtev potrošača, koji su primetili da je masa manja od 1kg, potrebno je izvršiti proveru, na bazi slučajnog uzorka od 25 pakovanja brašna. Poznato je da mašina za punjenje ima standardnu devijaciju  $\sigma = 15$ g.

U ovom problemu, možemo pretpostaviti da je masa jednog pakovanja brašna normalna slučajna promenljiva sa matematičkim očekivanjem  $\mu$  i varijansom  $\sigma^2 = 225$ . Zadatak je da se testira

$$H_0 : \mu = 1000 \quad \text{protiv} \quad H_1 : \mu < 1000.$$

Uzećemo nivo značajnosti  $\alpha = 0.05$ . Statistika testa može da bude aritmetička sredina uzorka  $\hat{\mu}$ , koja kao što znamo, ima  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$  raspodelu, gde je  $n = 25$ . Male vrednosti za  $\hat{\mu}$  su dokaz protiv hipoteze  $H_0$ ; oblast odbacivanja je  $\{\hat{\mu} < c\}$ , sa nekim  $c$  koje izračunavamo iz nivoa značajnosti. Kako skup  $\Theta_0$  sadrži samo jednu vrednost,  $\mu = 1000$ , statistika  $\hat{\mu}$  pri nultoj hipotezi ima  $\mathcal{N}(1000, 9)$  raspodelu, tako da je

$$(1) \quad \alpha = P(\hat{\mu} < c) = P\left(Z < \frac{c - 1000}{3}\right).$$

Odavde za  $\alpha = 0.05$ , nalazimo da je  $(c - 1000)/3 = -1.64$ , odakle je  $c = 995$  (zaokruženo na ceo broj). Prema tome, test sa nivoom značajnosti 0.05, na bazi uzorka obima 25, ima sledeće pravilo odlučivanja: Ako je  $\hat{\mu} < 995$ , hipoteza  $H_0$  se odbacuje u korist  $H_1$ ; u suprotnom slučaju, hipoteza  $H_0$  se ne odbacuje.

Sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.01$ , dobija se da je  $c = 993$ , dok se sa  $\alpha = 0.1$  dobija  $c = 996$ .

**Primer 156.** Od dva tipa radara,  $A$  i  $B$ , radar  $B$  je novije tehnologije i tvrdi se da je bolji. Kako je radar  $B$  i skuplji od radara  $A$ , kupac će uzeti radar  $B$  samo ako on otkriva pokretni objekat pre radara  $A$  u više od 60% slučajeva.

Izvodi se 20 eksperimenata. Neka je  $S$  broj slučajeva u kojima je radar  $B$  bolji od radara  $A$  (tj. otkriva pokretni objekat pre radara  $A$ ). Neka je  $p$  (nepoznata) verovatnoća da je  $B$  bolji od  $A$ . Tada je  $S \sim \text{Bin}(20, p)$ . Hipoteza koju treba

dokazati je  $H_1 : p > 0.6$ , a za nultu hipotezu uzimamo  $H_0 : p \leq 0.6$ . Testiraćemo  $H_0$  protiv  $H_1$  sa nivoom značajnosti  $\alpha \leq 0.05$  (kada statistika testa ima diskretnu raspodelu, nivo značajnosti se obično ne može tačno dostići, pa onda zahtevamo da ne bude veći od zadate vrednosti). Hipotezu  $H_0$  treba odbaciti ako je  $S$  veliko, dakle, ako je  $S \geq c$ , pri čemu kritičnu vrednost  $c$  biramo na osnovu datog nivoa značajnosti na sledeći način.

U oblasti u kojoj važi hipoteza  $H_0$ , tj. za  $p \leq 0.6$  imamo da je

$$\alpha(p) = \gamma(p) = P(S \geq c) = \sum_{k \geq c} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}.$$

Kako je  $S$  celobrojna slučajna promenljiva, ima smisla uzeti samo ceo broj  $c$  koji biramo tako da

$$\sum_{k=c}^{20} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k} \leq 0.05 \quad \text{za svako } p \leq 0.6.$$

Suma sa leve strane gornje nejednakosti u oblasti  $p \leq 0.6$  dostiže maksimum za  $p = 0.6$  (jer je funkcija raspodele binomne raspodele monotono opadajuća po  $p$ , videti primedbu na strani 165). Odavde zaključujemo da  $c$  treba izabrati tako da je

$$\sum_{k=c}^{20} \binom{20}{k} (0.6)^k (0.4)^{20-k} \leq 0.05.$$

Probanjem za razne vrednosti  $c$  nalazimo da je najmanje  $c$  za koje je ova nejednakost ispunjena  $c = 17$ , pri čemu je  $\alpha = \alpha(0.6) = 0.0159^1$ .

Prema tome, test kojim se, pod datim zahtevima, testira  $H_0$  protiv  $H_1$  ima sledeće pravilo odlučivanja:

Ako je  $S \geq 17$ ,  $H_0$  se odbacuje, u protivnom  $H_0$  se ne odbacuje.

Verovatnoća greške druge vrste ovog testa zavisi od  $p$  u oblasti  $\Theta_1 = (0.6, 1]$ :

$$\beta(p) = P(S < c) = \sum_{k=0}^{16} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}, \quad p > 0.6.$$

Supremum ove verovatnoće je vrednost koja se dobija za  $p = 0.6$ ; dakle

$$\sup_{p \in \Theta_1} \beta(p) = 1 - \alpha = 0.9841.$$

Ovako velika mogućnost greške druge vrste, naravno ne odgovara prodavcu radara. Čak i ako je radar  $B$  zaista mnogo bolji od radara  $A$ , sa, na primer,  $p = 0.9$ , prodavac ima razloga za zabrinutost, jer je tada

$$\beta(0.9) = \sum_{k=0}^{16} \binom{20}{k} (0.9)^k (0.1)^{20-k} = 0.133.$$

<sup>1</sup>Izračunavanja u ovom primeru, kao i sva komplikovanija izračunavanja u sledećim primerima, urađena su uz pomoć programa *Derive*.

Ali, sa gledišta kupca, i  $\alpha = 0.05$  je prevelika mogućnost greške. Šta ako kupac zahteva niži nivo značajnosti, na primer  $\alpha \leq 0.01$ ? U tom slučaju trebalo bi povećati kritičnu vrednost testa. Kako je za  $p = 0.6$ ,  $P(S \geq 18) = 0.0036$ , kritična vrednost  $c = 18$  bi zadovoljila postavljeni uslov. Sada bi, naravno, bilo još teže dokazati da je radar  $B$  bolji; verovatnoća greške druge vrste se povećala.  $\square$

Iz definicije pojmova u vezi sa testiranjem hipoteza, kao i iz prethodnih primera, zaključujemo da važi opšte pravilo:

Za isti obim uzorka i istu statistiku testa, što je manji nivo značajnosti, utoliko je teže odbaciti hipotezu  $H_0$ . Smanjenjem nivoa značajnosti povećava se verovatnoća greške druge vrste.

Ipak postoji mogućnost da se istovremeno smanje i nivo značajnosti i verovatnoća greške druge vrste za parametre koji su u unutrašnjosti oblasti  $\Theta_1$ . Rešenje je u povećanju obima uzorka.

**Primer 157.** Pretpostavimo da prodavac iz primera 156 zna statistiku i pristaje da se nivo značajnosti smanji na 0.01, ali da se istovremeno broj ispitivanja poveća sa 20 na 50.

U ovom slučaju ponovo testiramo hipotezu  $H_0 : p \leq 0.6$  protiv alternative  $H_1 : p > 0.6$ . Statistika testa je broj slučajeva  $S$  u 50 opita u kojima je radar  $B$  bio bolji od radara  $A$ . Ovde je  $S \sim \text{Bin}(50, p)$ . Oblast odbacivanja testa je  $\{S \geq c\}$ . Ako nivo značajnosti ne sme biti veći od 0.01, najmanja moguća vrednost za  $c$  je 39, sa  $\alpha = \alpha(0.6) = 0.0057$ . Prema tome, pravilo testa glasi:

Ako je  $S \geq 39$ , odbacuje se  $H_0$ , u protivnom se  $H_0$  ne odbacuje.

Supremum greške druge vrste jednak je  $1 - \alpha = 0.9943$ . Da li je prodavac dobro uradio što je ponudio ovakve uslove? Jeste, ako je siguran da je  $p$  veliko. Na primer, za  $p = 0.9$  dobijamo

$$\beta(0.9) = 1 - \sum_{k=39}^{50} \binom{50}{k} (0.9)^k (0.1)^{50-k} = 0.0032,$$

što je neuporedivo bolje od situacije za  $n = 20$ , gde smo izračunali da je  $\beta(0.9) = 0.133$ . U stvari, prodavac je u boljem položaju od kupca jer je  $\beta < \alpha$ . Međutim, ako  $p$  nije dovoljno veliko, prodavac je u lošijem položaju. Na primer,  $\beta(0.8) = 0.29$ , dok je  $\beta(0.7) = 0.86$ ! U ovoj situaciji, prodavac bi morao da traži još veće  $n$ , kako bi smanjio grešku druge vrste.  $\square$

Hipoteze se mogu testirati i bez efektivnog nalaženja kritične vrednosti. Pretpostavimo da smo, u primeru 157, sa  $n = 50$  i  $\alpha \leq 0.01$  dobili  $S = 41$ . Kako je, za  $p = 0.6$ ,  $P(S \geq 41) = 0.0008$ , zaključujemo da bismo hipotezu  $H_0$  odbacili sa nivoom značajnosti 0.0008, a tim pre je odbacujemo na većem nivou značajnosti.

Neka je  $S = s$  realizovana vrednost statistike testa. Najmanji nivo značajnosti na kome bismo hipotezu  $H_0$  odbacili pri  $S = s$  je **značajnost**<sup>1</sup> vrednosti  $s$ .

Ako je oblast odbacivanja oblika  $\{S \geq c\}$ , značajnost vrednosti  $s$  dobija se kao  $\sup_{\theta \in \Theta_0} P(S \geq s)$ . Analogno se postupa u slučajevima kada je oblast odbacivanja oblika  $\{S > c\}$ ,  $\{S \leq c\}$  ili  $\{S < c\}$ .

Ako se statistika testa realizuje sa vrednošću čija je značajnost manja od zadatog nivoa značajnosti, tada hipotezu  $H_0$  odbacujemo.

**Primer 158.** Pretpostavimo da imamo uzorak  $(X_1, \dots, X_{100})$  iz normalne raspodele  $\mathcal{N}(\mu, 1)$ , gde je  $\mu$  nepoznato. Testiramo

$$H_0 : \mu > 1 \quad \text{protiv} \quad H_1 : \mu \leq 1.$$

Zahteva se nivo značajnosti  $\alpha = 0.05$ .

Statistika testa može da bude aritmetička sredina uzorka  $\hat{\mu}$ . Male vrednosti za  $\hat{\mu}$  su dokaz protiv hipoteze  $H_0$ ; oblast odbacivanja je  $\{\hat{\mu} \leq c\}$ , sa nekim  $c$  koje može da se izračuna. Umesto toga, možemo da nađemo značajnost dobijene vrednosti statistike testa i da je uporedimo sa zadatim nivoom značajnosti.

Pretpostavimo da smo u eksperimentu dobili  $\hat{\mu} = 0.8$ . Ako je prava vrednost parametra jednaka  $\mu$ , tada je

$$P(\hat{\mu} \leq 0.8) = P\left(\frac{\hat{\mu} - \mu}{1/10} \leq \frac{0.8 - \mu}{1/10}\right) = P(Z \leq 8 - 10\mu),$$

gde je  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Za oblast  $\Theta_0 = \{\mu | \mu > 1\}$ , supremum ove verovatnoće dobija se za  $\mu = 1$  i iznosi  $P(Z \leq -2) = 0.023$ . Ovo je značajnost dobijene vrednosti statistike testa. Kako je ona manja od zadatog nivoa značajnosti, hipotezu  $H_0$  odbacujemo.

Da smo u eksperimentu dobili  $\hat{\mu} = 0.9$ , imali bismo značajnost  $P(Z \leq -1) = 0.16$ , pa hipotezu  $H_0$  ne bismo mogli da odbacimo.

Inače, kritična vrednost testa može se odrediti iz uslova  $P(Z \leq 10(c - 1)) = 0.05$ , odakle je  $10(c - 1) = -1.64$ , odnosno  $c = 0.836$ .  $\square$

Prednost testiranja hipoteza izračunavanjem značajnosti jeste u tome što se za svaku dobijenu vrednost statistike testa može kvantitativno oceniti koliko protivureči hipotezi  $H_0$ . Naime, unapred određen nivo značajnosti nije nikakvo čvrsto pravilo koje se ne sme izmeniti. Ako je značajnost dobijene vrednosti, recimo, 0.051, nema razloga da ne odbacimo hipotezu koju bismo inače odbacili sa 0.05.

U primerima koje smo do sada razmatrali, testirali smo hipoteze o vrednostima parametra. Ovim problemima bavićemo se nešto detaljnije u sledećem odeljku. Pored ovakvih hipoteza, koje se nazivaju i **parametarskim**, od interesa su i tzv. **neparametarske hipoteze**, u čijoj formulaciji se ne pojavljuju nikakvi parametri. Na primer, možemo testirati hipotezu  $H_0$  da je dati niz brojeva slučajan. Jedan test

<sup>1</sup>U literaturi se koristi i naziv **p-vrednost**.

kojim se ovakva hipoteza testira (test serija) izložen je već u primeru 32 na strani 24. Ili, hipoteza može biti da dati niz brojeva potiče iz neke određene raspodele. O testiranju nekih neparametarskih hipoteza biće reči u glavi 12.

## 9.2 Testiranje hipoteza o vrednostima parametara

Neke slučajeve testiranja hipoteza o vrednostima parametara proučili smo u primerima datim u odeljku 9.1.

U sledećem primeru testiraćemo hipotezu o matematičkom očekivanju normalne raspodele u slučaju kada su nepoznati  $\mu$  i  $\sigma^2$ .

**Primer 159.** Dat je uzorak  $(X_1, \dots, X_n)$  iz raspodele  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , gde su  $\mu$  i  $\sigma^2$  nepoznati. Za dato  $\mu_0$ , treba testirati

$$H_0 : \mu = \mu_0, \quad \text{protiv} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0,$$

sa nivoom značajnosti  $\alpha$ . Za razliku od primera 155 i 158, gde je statistika testa bila  $\hat{\mu}$ , ovde uzimamo statistiku

$$T = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{s/\sqrt{n}},$$

jer njena raspodela pod hipotezom  $H_0$  ( $t$  raspodela sa  $n - 1$  stepeni slobode) ne zavisi od  $\sigma^2$ . Dokazi protiv hipoteze  $H_0$  (a u korist  $H_1$ ) su sve vrednosti za  $T$  daleko od nule sa obe strane; dakle, oblast odbacivanja bi bila oblika  $|T| \geq c$ . Kritičnu vrednost  $c$  nalazimo iz

$$P(|T| \geq c) = \alpha \quad \text{za} \quad \mu = \mu_0,$$

odakle je  $c = \varepsilon_{1-\alpha/2}$ , kvantil reda  $1 - \alpha/2$  raspodele  $t(n - 1)$ . Odavde dobijamo pravilo testa:

Ako je  $|T| \geq \varepsilon_{1-\alpha/2}$ , odbacujemo  $H_0$ , u protivnom ne odbacujemo  $H_0$ .

Za  $n > 30$ , umesto kvantila  $t$  raspodele uzimaju se kvantili  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodele, a tada je ovaj test primenljiv i ako je  $(X_1, \dots, X_n)$  nezavisan uzorak iz proizvoljne raspodele.

Kao brojni primer, pretpostavimo da je  $n = 25$  i  $\alpha = 0.05$ . Iz tablica nalazimo da je  $\varepsilon_{0.975} = 2.064$ , pa pravilo odlučivanja glasi:

$$H_0 \text{ odbacujemo ako i samo ako je } |T| = \left| \frac{5(\hat{\mu} - \mu_0)}{s} \right| \geq 2.064. \quad \square$$

**Primer 160.** Da li ćemo odbaciti  $H_0$  ili ne pri zadatom nivou značajnosti zavisi i od  $H_1$ . Pretpostavimo da u situaciji kao u prethodnom primeru testiramo  $H_0 : \mu = 0$  protiv  $H_1 : \mu > 0$ . Oblast odbacivanja je sada data sa  $T > \varepsilon_{1-\alpha}$ , što u posmatranom slučaju ( $n = 25, \alpha = 0.05$ ) daje  $T > 1.711$ . Dakle, ako imamo da je  $T = 1.8$ , na primer, tada se hipoteza  $H_0$  ne odbacuje ako se testira protiv  $H_1 : \mu \neq 0$ , a odbacuje se ako se testira protiv  $H_1 : \mu > 0$ .

**Primer 161.** Imamo na raspolaganju neograničen broj nezavisnih odbiraka signala sa  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  raspodelom, gde je  $\sigma^2$  poznato. Koliko treba uzeti odbiraka da bismo na osnovu njih testirali hipotezu  $H_0 : \mu = 2$  protiv  $H_1 : \mu > 2$ , sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.025$  ali tako da greška druge vrste za  $\mu = 2.1$  ne bude veća od 0.05 ?

**Rešenje.** Neka je  $n$  obim uzorka. Za statistiku testa uzimamo

$$T = \frac{\hat{\mu} - 2}{\sigma/\sqrt{n}}, \quad \text{oblast odbacivanja: } T > c,$$

gde je  $c = 1.96$ , kvantil reda 0.975 standardne normalne raspodele. Verovatnoća greške druge vrste u  $\mu = 2.1$  jednaka je  $P(T \leq c)$ , pri čemu se  $T$  računa kao da je prava raspodela  $\mathcal{N}(2.1, \sigma^2)$ : ♣

$$T = \frac{\hat{\mu} - 2}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\hat{\mu} - 2.1}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{0.1}{\sigma/\sqrt{n}} = Z + \frac{0.1}{\sigma/\sqrt{n}},$$

gde  $Z$  ima  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodelu. Prema tome,

$$P(T \leq 1.96) = P\left(Z \leq 1.96 - \frac{0.1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \leq 0.05,$$

odakle nalazimo da je  $1.96 - \frac{0.1}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -1.64$ , tj.  $n \geq 36^2 \sigma^2$ .

Ako je  $\sigma^2$  nepoznato, problem se rešava koristeći se idejom kao u primeru 139 na strani 175.  $\square$

Postoji još jedan način za testiranje hipoteza o parametrima. On istovremeno daje vezu između testova hipoteza i intervala poverenja. Objasnićemo ga na sledećem primeru.

**Primer 162.** Testirajmo

$$H_0 : \mu \leq 0, \quad \text{protiv } H_1 : \mu > 0,$$

sa nivoom značajnosti  $\alpha$ .  $\mu$  je matematičko očekivanje normalne raspodele sa nepoznatim  $\mu$  i  $\sigma^2$ , a na raspolaganju nam je nezavisan uzorak  $(X_1, \dots, X_n)$  iz pomenute raspodele. Oblast dozvoljenih vrednosti parametra  $\mu$  podeljena je na dva dela:  $\Theta_0 = (-\infty, 0]$  i  $\Theta_1 = (0, +\infty)$ . Jednostrani interval poverenja za  $\mu$  sa nivoom poverenja  $1 - \alpha$  dobija se primenom teoreme 8.3:

$$I_{1-\alpha} = \left[ \hat{\mu} - \varepsilon_{1-\alpha} \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty \right).$$

Verovatnoća da je  $\mu$  van navedenog intervala jednaka je  $\alpha$ . Ako usvojimo pravilo

$$\text{Hipotezu } H_0 \text{ odbacujemo ako i samo ako je } I_{1-\alpha} \subset (0, +\infty),$$

tada će nivo značajnosti ovoga testa biti jednak verovatnoći da  $I_{1-\alpha}$  ne sadrži nulu ako je prava vrednost parametra  $\mu = 0$ . Prema konstrukciji intervala poverenja, ova verovatnoća jednaka je  $\alpha$ . Dakle, opisani test ima nivo značajnosti  $\alpha$ .  $\square$

U opštem slučaju primenjuje se analogan postupak:

Neka je $\Theta = (a, b)$ oblast dozvoljenih vrednosti parametra $\theta$ , gde je $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .	
Neka su $H_0$ i $H_1$ hipoteze kojima odgovaraju oblasti $\Theta_0$ i $\Theta_1$ vrednosti parametra $\theta$ . Konstruišimo interval poverenja $I_{1-\alpha}$ sa nivoom poverenja $1 - \alpha$ po sledećem pravilu	
Ako je $H_1$ oblika	tada je $I_{1-\alpha}$ oblika
$\theta < \theta_0$	$(a, Y)$
$\theta > \theta_0$	$(Y, b)$
$\theta \neq \theta_0$	$(Y_1, Y_2)$
gde su $Y, Y_1, Y_2$ slučajne promenljive.	
Test sa pravilom odlučivanja	
Hipoteza $H_0$ se odbacuje ako i samo ako $I_{1-\alpha} \cap \Theta_0 = \emptyset$	
ima nivo značajnosti jednak $\alpha$ .	

**Primer 163.** Neka je  $(X_1, \dots, X_{20})$  nezavisan uzorak iz  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  raspodele, sa nepoznatim  $\mu$  i  $\sigma^2$ . Testiraćemo hipotezu  $H_0 : \sigma^2 = 1$  protiv alternativne hipoteze  $H_1 : \sigma^2 \neq 1$ , sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.1$

Prema teoremi 8.4 na strani 175, dvostrani interval poverenja za  $\sigma^2$  sa nivoom poverenja od 0.9 je

$$I_{0.9} = \left[ \frac{19s^2}{\varepsilon_{0.95}}, \frac{19s^2}{\varepsilon_{0.05}} \right],$$

gde su  $\varepsilon_{0.95}$  i  $\varepsilon_{0.05}$  kvantili  $\chi^2(19)$  raspodele. Iz tablica nalazimo da je  $\varepsilon_{0.95} = 30.144$  i  $\varepsilon_{0.05} = 10.117$ , pa je

$$I_{0.9} = [0.63s^2, 1.88s^2].$$

Konstruisani interval poverenja ne sadrži broj 1 ako i samo ako je  $1 < 0.63s^2$  ili  $1 > 1.88s^2$ , odnosno  $s^2 > 1.58$  ili  $s^2 < 0.53$ .

Dakle, traženi test ima pravilo odlučivanja:

Hipoteza  $H_0$  se odbacuje ako i samo ako je  $s^2 < 0.53$  ili  $s^2 > 1.58$ .  $\square$

Kod testiranja nalaženjem značajnosti realizovane vrednosti statistike  $(n-1)s^2$ , treba voditi računa o tome da  $\chi^2$  raspodela nije simetrična. Pretpostavimo da smo u primeru 163 dobili  $s^2 = y$ . Kako se značajnost definiše kao najmanji nivo značajnosti pri kome odbacujemo  $H_0$ , značajnost vrednosti  $y$  jednaka je

$$2 \min(P(V < 19y), P(V > 19y)), \quad V \sim \chi^2(19).$$

Naime,  $H_0$  možemo odbaciti ili zato što je  $y$  suviše malo ili zato što je  $y$  suviše veliko.

### 9.3 Hipoteze o koeficijentu korelacije

Neka je  $(X, Y)$  slučajni vektor. Iz dvodimenzionalne raspodele vektora  $(X, Y)$  uzimamo uzorak obima  $n$ :

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n).$$

Ovde su parovi  $(X_i, Y_i)$  nezavisni, dok slučajne veličine iz istog para  $(X_i, Y_i)$  imaju određenu zajedničku raspodelu i mogu biti zavisne, sa koeficijentom korelacije  $\rho$ . Kako je

$$\rho(X, Y) = \frac{E(X - EX)(Y - EY)}{\sqrt{\text{Var } X \cdot \text{Var } Y}},$$

metodom momenata dobijamo ocenu za  $\rho$ :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\mu}_X)(Y_k - \hat{\mu}_Y)}{\left( \sum_{k=1}^n (X_k - \hat{\mu}_X)^2 \sum_{k=1}^n (Y_k - \hat{\mu}_Y)^2 \right)^{1/2}}$$

Statistika  $\hat{\rho}$  naziva se **uzoračkim koeficijentom korelacije**.

Za testiranje hipoteza u vezi sa  $\rho$ , kao i za nalaženje intervala poverenja, od koristi su sledeće dve teoreme:

**Teorema 9.1** *Ako slučajni vektor  $(X, Y)$  ima dvodimenzionalnu normalnu raspodelu sa  $\rho = 0$ , tada statistika*

$$T = \frac{\hat{\rho}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}$$

ima  $t(n-2)$  raspodelu.

**Teorema 9.2** *Ako slučajni vektor  $(X, Y)$  ima koeficijent korelacije  $\rho$ , tada je raspodela statistike*

$$T = \frac{1}{2} \log \frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}$$

asimptotski (kad  $n \rightarrow +\infty$ ) normalna, sa

$$ET = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho}{1-\rho}, \quad \text{Var } T = \frac{1}{n-3}.$$

Teorema 9.1 koristi se za testiranje hipoteze  $H_0 : \rho = 0$  u slučaju kada vektor  $(X, Y)$  ima normalnu raspodelu ili kada je obim uzorka veliki, pa se može prihvatiti normalna aproksimacija.

Teorema 9.2 primenjuje se za određivanje intervala poverenja i za testiranje hipoteza o koeficijentu  $\rho$  na velikom uzorku ( $n \geq 25$ ).

**Primer 164.** Iz uzorka obima  $n = 27$  iz dvodimenzionalne normalne raspodele dobijeno je  $\hat{\rho} = 0.6$ . Sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.05$  testirati hipotezu  $H_0 : \rho = 0$  protiv alternativne hipoteze  $H_1 : \rho > 0$ .

**Rešenje.** Primenićemo teoremu 9.1. Statistika testa ima vrednost

$$T = \frac{\hat{\rho}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}} = 3.75.$$

Pod hipotezom  $H_0$ , ova statistika ima raspodelu  $t(25)$ . Kako je  $T$  monotonno rastuća funkcija od  $\hat{\rho}$ , velike pozitivne vrednosti za  $T$  su dokaz protiv  $H_0$ , a u korist  $H_1$ , pa je oblast odbacivanja oblika  $T > c$ , gde je  $c$  kvantil reda 0.95 raspodele  $t(25)$ . Iz tablica nalazimo da je  $c = 1.708$ . Kako je dobijena vrednost statistike veća od kritične vrednosti testa, hipotezu  $H_0$  odbacujemo.

**Primer 165.** Iz uzorka obima 58 izračunat je koeficijent korelacije  $\hat{\rho} = 0.81$ . Odrediti dvostrani 95% interval poverenja za  $\rho$ , a zatim testirati hipotezu  $H_0 : \rho = 0.6$  protiv  $H_1 : \rho \neq 0.6$  sa nivoom poverenja  $\alpha = 0.05$ .

**Rešenje.** Prema teoremi 9.2, ako je  $\rho$  prava vrednost koeficijenta korelacije, statistika

$$T = \frac{1}{2} \log \frac{1+\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}}$$

ima približno normalnu raspodelu sa

$$\mu = ET = \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho}{1-\rho}, \quad \text{ i } \quad \sigma^2 = \text{Var } T = \frac{1}{n-3}.$$

Prema tome, statistika

$$Z = \frac{T - \mu}{\sigma}$$

ima približno  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodelu. Dvostrani 95% interval poverenja dobija se iz uslova da je

$$|Z| \leq 1.96, \quad \text{ tj. } \quad T - 1.96\sigma < \mu < T + 1.96\sigma.$$

U datom primeru je  $\sigma = 1/\sqrt{55} = 0.135$  i  $T = 1.127$  pa imamo da je

$$0.862 < \mu < 1.392, \quad \text{ tj. } \quad 0.862 < \frac{1}{2} \log \frac{1+\rho}{1-\rho} < 1.392,$$

odakle nalazimo da  $\rho \in (0.697, 0.884)$ . Kako vrednost dobijeni interval ne sadrži 0.6, hipotezu  $H_0$  odbacujemo.

## 9.4 Hipoteze o razlici parametara

U ovom delu izložićemo metode dobijanja intervala poverenja za razliku srednjih vrednosti dve populacije i količnik dve varijanse, kao i za testiranje odgovarajućih hipoteza.

Kada imamo dva uzorka istog obima iz dve populacije, postupci u vezi sa razlikom srednjih vrednosti mogu se svesti na već izložen slučaj jedne populacije. Naime, neka su  $(X_1, \dots, X_n)$  i  $(Y_1, \dots, Y_n)$  nezavisni uzorci iz dve raspodele sa matematičkim očekivanjima  $\mu_1$  i  $\mu_2$  respektivno. Razlike  $U_k = X_k - Y_k$  imaju matematičko očekivanje  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ , pa se može smatrati da imamo jedan uzorak  $U_1, \dots, U_n$  na osnovu koga testiramo hipoteze o  $\mu$  i konstruišemo odgovarajuće intervale poverenja.

Izložićemo sada približan metod koji se može primeniti u opštem slučaju.

### 9.4.1 Razlika srednjih vrednosti (aproksimativan metod za velike uzorke)

Pretpostavimo da imamo dva velika nezavisna (i međusobno nezavisna) uzorka obima  $n_1$  odnosno  $n_2$  iz dve različite raspodele sa matematičkim očekivanjima  $\mu_1$  i  $\mu_2$  respektivno. Interesuje nas ocena razlike  $\mu_1 - \mu_2$ , kao i testiranje hipoteza u vezi sa tom razlikom.

Na bazi uzoraka možemo naći standardne ocene matematičkog očekivanja i varijanse  $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, s_1^2$  i  $s_2^2$ . Slučajne promenljive  $\hat{\mu}_1$  i  $\hat{\mu}_2$  imaju, za velike uzorke, približno normalnu  $\mathcal{N}(\mu_1, s_1^2/n_1)$ , odnosno  $\mathcal{N}(\mu_2, s_2^2/n_2)$  raspodelu. Prema tome, njihova razlika ima normalnu raspodelu  $\mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)$ , pa slučajna promenljiva

$$Z = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

ima približno  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodelu. Odavde izvodimo intervale poverenja.

**Teorema 9.3** Neka su  $(X_1, \dots, X_{n_1}), (Y_1, \dots, Y_{n_2})$  nezavisni (i međusobno nezavisni) uzorci iz raspodela sa nepoznatim matematičkim očekivanjima  $\mu_1$  i  $\mu_2$ . Pretpostavljamo da su  $n_1$  i  $n_2$  veliki ( $\geq 30$ ).

Neka je  $\varepsilon_u$  kvantil reda u raspodele  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Dvostrani interval poverenja** sa nivoom poverenja  $1 - \alpha$  za  $\delta = \mu_1 - \mu_2$  definisan je krajnjim tačkama

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 \pm \varepsilon_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

**Jednostrani intervali poverenja** sa nivoom poverenja  $1 - \alpha$  su

$$\left( -\infty, \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 + \varepsilon_{1-\alpha} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right], \quad \left[ \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \varepsilon_{1-\alpha} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}, +\infty \right).$$

Testiranje hipoteza o razlikama zasnovano je na istoj statistici koja se koristi i za intervale poverenja.

**Primer 166.** Iz dva signala su uzeti uzorci obima  $n_1 = n_2 = 10000$  i dobijene su srednje vrednosti  $\hat{\mu}_1 = 2.11$ ,  $s_1^2 = 0.31$ ,  $\hat{\mu}_2 = 1.13$  i  $s_2^2 = 0.29$ . Sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.05$ , testirati hipotezu  $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 1$  protiv alternativne hipoteze  $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 1$ . Zatim konstruisati dvostrani 95% interval poverenja za razliku  $\mu_1 - \mu_2$ . Kolika je značajnost dobijene brojne vrednosti ocene razlike?

**Rešenje.** U ovom primeru je  $n_1 = n_2 = n$ , a statistika testa je

$$T = \sqrt{n} \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - 1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}}.$$

Velike vrednosti za  $|T|$  su dokaz protiv  $H_0$ , a u korist  $H_1$ . Statistika  $T$  ima pod hipotezom  $H_0$  raspodelu  $\mathcal{N}(0, 1)$ , pa se kritična vrednost testa dobija iz

$$P(|T| > c) = \alpha \iff c = \varepsilon_{1-\alpha/2},$$

gde je  $\varepsilon_{1-\alpha/2}$  kvantil standardne normalne raspodele. Kako je  $\varepsilon_{0.975} = 1.96$ , pa test ima sledeće pravilo:

Hipoteza  $H_0$  se odbacuje ako i samo ako je  $|T| > 1.96$ .

U datom slučaju odbacujemo  $H_0$  jer je  $T = -2.58$ .

95% interval poverenja je interval sa krajnjim tačkama  $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 \pm \frac{1.96}{\sqrt{n}} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ . Za date brojne vrednosti nalazimo interval  $[0.9648, 0.9952]$ .

Značajnost dobijene vrednosti je najmanji nivo poverenja sa kojim bismo odbacili  $H_0$ . U ovom slučaju značajnost se izračunava iz  $P(|T| > 2.58) = 0.0098$ , što je nešto manje od 1%.  $\square$

Kada se testom razlike odbaci hipoteza da su srednje vrednosti jednake, ponekad se (u literaturi koja se bavi primenama) kaže da je ustanovljena *značajna* ili „*signifikantna*” razlika između dve srednje vrednosti. Ova fraza znači samo da je značajnost podataka *manja* od dozvoljenog nivoa značajnosti i da je time ustanovljeno da postoji razlika. To nikako ne mora da znači da je ta razlika od nekog značaja za bilo šta. Naime, statistički test razlike će, za dovoljno veliki uzorak, detektovati svaku, makar i zanemarljivo malu razliku između srednjih vrednosti.

Na izloženi način mogu se testirati i razlike između verovatnoća, s tim što se uzima  $s_i^2 = \hat{p}_i(1 - \hat{p}_i)$ , za  $i = 1, 2$ .

#### 9.4.2 T-test za razliku srednjih vrednosti (egzaktan metod za dve normalne raspodele sa istom varijansom)

Ako su uzorci malog obima, aproksimativan metod se ne može primeniti. U slučaju kada su oba uzorka iz normalnih raspodela sa međusobno jednakim varijansama, može se primeniti egzaktan metod, zasnovan na teoremi 7.8, tzv. T-test.

**Teorema 9.4** Neka su  $(X_1, \dots, X_{n_1}), (Y_1, \dots, Y_{n_2})$  nezavisni (i međusobno nezavisni) uzorci iz normalnih raspodela sa nepoznatim matematičkim očekivanjima  $\mu_1$  i  $\mu_2$  i sa međusobno jednakim (ali nepoznatim) varijansama. Definišimo

$$s_{1,2}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Neka je  $\varepsilon_u$  kvantil reda u raspodele  $t(n_1 + n_2 - 2)$ .

**Dvostrani interval poverenja** sa nivoom poverenja  $1 - \alpha$  za  $\delta = \mu_1 - \mu_2$  definisan je krajnjim tačkama

$$\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 \pm \varepsilon_{1-\alpha/2} s_{1,2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}.$$

**Jednostrani intervali poverenja** sa nivoom poverenja  $1 - \alpha$  su

$$\left(-\infty, \hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 + \varepsilon_{1-\alpha} s_{1,2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right], \quad \left[\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 - \varepsilon_{1-\alpha} s_{1,2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, +\infty\right)$$

**Primer 167.** Dati su uzorci

44, 44, 56, 46, 47, 38, 58, 53, 49, 35, 46, 30, 41,

35, 47, 55, 29, 40, 39, 32, 41, 42, 57, 51, 39,

za koje pretpostavljamo da potiču iz dve normalne raspodele sa istom varijan-  
som i matematičkim očekivanjima redom  $\mu_1$  i  $\mu_2$ . **a)** Naći dvostrani 95% inter-  
val poverenja za razliku  $\mu_1 - \mu_2$ . **b)** Testirati hipotezu  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  protiv  
 $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ , sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.05$ . **c)** Isto kao pod b), ali za hipotezu  
 $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ .

**Rešenje.** Obimi uzoraka su  $n_1 = 13$  i  $n_2 = 12$ . Kvantil  $\varepsilon_{0.975}$  raspodele  $t(23)$   
jednak je 2.096. Iz datih podataka dobijamo

$$\hat{\mu}_1 = 45.15, \quad \hat{\mu}_2 = 42.25, \quad s_1^2 = 64.0, \quad s_2^2 = 76.4, \quad s_z^2 = 69.9.$$

**a)** Primenom teoreme 9.4 dobijamo brojni 95% interval  $(-4.02, 9.82)$ .

**b)** Kako 95% interval poverenja sadrži nulu, hipotezu  $H_0$  ne odbacujemo.

**c)** U ovom slučaju, zbog oblika alternativne hipoteze, trebalo bi konstruisati novi  
jednostrani interval poverenja i videti da li on sadrži nulu. Na drugi način, hipotezu  
 $H_0$  odbacujemo u korist  $H_1$  ako je

$$T = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{s_{1,2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} > \varepsilon_{0.95},$$

gde je  $\varepsilon_{0.95} = 1.714$  (iz tablice  $t(23)$  raspodele). Kako je u našem primeru  $T = 0.84$ ,  
hipotezu  $H_0$  ne odbacujemo ni sada.

### 9.4.3 Količnik dve varijanse normalnih raspodela

Dve varijanse upoređujemo pomoću količnika, a ne pomoću razlike. Takav postupak proizilazi iz teoreme 7.11, koja utvrđuje da je

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1),$$

gde se  $s_1^2$ , odnosno  $s_2^2$  ocenjuju iz nezavisnih uzoraka iz raspodela  $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ , odnosno  $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

**Teorema 9.5** Neka je  $(X_1, \dots, X_{n_1})$  nezavisan uzorak iz  $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  raspodele i neka je  $(Y_1, \dots, Y_{n_2})$  nezavisan uzorak iz  $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  raspodele, pri čemu su pomenuta dva uzorka međusobno nezavisna. Označimo sa  $s_1^2$  i  $s_2^2$  ocene varijansi  $\sigma_1^2$  odnosno  $\sigma_2^2$  na osnovu datih uzoraka.

Neka je  $\varepsilon_u(m, n)$  kvantil reda  $u$  raspodele  $F(m, n)$ .

**Dvostrani interval poverenja** sa nivoom poverenja  $1 - \alpha$  za količnik  $\sigma_1^2/\sigma_2^2$  je

$$\left( \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{\varepsilon_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{s_1^2}{s_2^2} \varepsilon_{1-\alpha/2}(n_2 - 1, n_1 - 1) \right).$$

**Jednostrani intervali poverenja** sa nivoom poverenja  $1 - \alpha$  su

$$\left( 0, \frac{s_1^2}{s_2^2} \varepsilon_{1-\alpha}(n_2 - 1, n_1 - 1) \right), \quad \left( \frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{1}{\varepsilon_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, +\infty \right).$$

**Dokaz.** Na osnovu drugog dela teoreme 7.9 važi da je

$$\frac{1}{\varepsilon_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)} = \varepsilon_{1-\alpha}(n_2 - 1, n_1 - 1).$$

Neka je  $F$  slučajna promenljiva sa  $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$  raspodelom. Polazeći od definicije kvantila imamo da je

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(F \geq \varepsilon_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)) = P\left(\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \geq \varepsilon_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)\right) \\ &= P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)}\right) = P\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \varepsilon_{1-\alpha}(n_2 - 1, n_1 - 1)\right). \end{aligned}$$

Ovim je dokazano tvrđenje za prvi jednostrani interval. Ostala tvrđenja se slično dokazuju.  $\square$

**Primer 168.** Jedna veličina merena je pomoću dva različita instrumenta,  $A$  i  $B$ , čije su varijanse  $\sigma_1^2$  odnosno  $\sigma_2^2$  nepoznate. Iz 10 merenja instrumentom  $A$  dobijeno je  $s_1^2 = 5.29$  a iz 12 merenja instrumentom  $B$ ,  $s_2^2 = 2.25$ .

**a)** Testirati hipotezu  $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$  protiv hipoteze  $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2$ , sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.05$ . **b)** Konstruisati dvostrani 90% interval poverenja za količnik  $\sigma_1/\sigma_2$ .

**Rešenje. a)** Pod hipotezom  $H_0$  količnik  $F = s_1^2/s_2^2$  ima  $F(9, 11)$  raspodelu. Velike vrednosti ovog količnika su dokaz protiv  $H_0$ , a u korist  $H_1$ . Prema tome, za oblast odbacivanja uzimamo  $F > c$ . Iz uslova da je  $\alpha = 0.05$  nalazimo da je  $c$  kvantil  $F(9, 1)$  raspodele reda 0.95, pa iz Tablice 4 čitamo da je  $c = 2.90$ . Kako je realizovana vrednost statistike testa  $F = s_1^2/s_2^2 = 2.35 < 2.90$ , hipotezu  $H_0$  ne odbacujemo.

**b)** Da bismo primenili teoremu 9.5, nalazimo kvantile raspodele  $F(9, 11)$  i  $F(11, 9)$ :  $\varepsilon_{0.95}(9, 11) = 2.90$  i  $\varepsilon_{0.95}(11, 9) = 3.10$  (poslednju vrednost nalazimo ekstrapolacijom iz tablice). 90% interval poverenja za količnik varijansi je

$$\left( \frac{F}{\varepsilon_{0.95}(9, 11)}, F \cdot \varepsilon_{0.95}(11, 9) \right) = \left( \frac{2.35}{2.90}, 2.35 \cdot 3.10 \right) = (0.81, 7.285).$$

Interval poverenja za  $\sigma_1/\sigma_2$  je  $(\sqrt{0.81}, \sqrt{7.285}) = (0.9, 2.7)$ . Kao što vidimo, dobijeni interval je veoma širok, što je posledica malih uzoraka.

## 9.5 Zadaci

**159\*** Imamo dva tipa novčića: ispravan („fer”) i nehomogen koji pokazuje pismo sa verovatnoćom 0.55. Dobili smo jedan novčić, ali ne znamo kakav je. Da bismo ga testirali, bacamo ga 1000 puta i usvajamo pravilo: Ako padne pismo više od  $K = 525$  puta, novčić odbacujemo kao nehomogen, u protivnom prihvatamo da je homogen. Naći verovatnoću greške odbacivanja homogenog novčića.

**160\*** Koliko treba da bude  $K$  u zadatku 159 da bi verovatnoća greške odbacivanja homogenog novčića bila manja od 0.01?

**161.** Testira se hipoteza  $H_0 : \mu < 65$  protiv  $H_1 : \mu \geq 65$ , na osnovu uzorka obima 9 iz normalne raspodele za koju je poznato  $\sigma^2 = 36$ .

**a)** Formulirati statistiku testa i oblast odbacivanja za nivo značajnosti  $\alpha = 0.05$ .

**b)** Kolika je verovatnoća greške druge vrste za  $\mu = 67$ ? **c)** Naći moć testa za cele vrednosti  $\mu$  između 63 i 70 i skicirati funkciju moći  $\mu \mapsto \gamma(\mu)$ .

**162.** Primeniti test izveden u zadatku 161 na uzorak 63, 72, 64, 69, 59, 65, 66, 64, 65.

**163.** Imamo na raspolaganju neograničen broj nezavisnih odbiraka signala sa  $\mathcal{N}(\mu, 1)$  raspodelom, gde je  $\mu$  nepoznato. Formulirati test hipoteze  $H_0 : \mu = 3$  protiv  $H_1 : \mu \neq 3$  sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.05$ , na osnovu  $n = 100$  odbiraka. Koliko treba da bude najmanje  $n$  ako se zahteva da greška druge vrste za  $\mu = 3.2$  ne bude veća od 0.05?

**164\*** U cilju ispitivanja parapsiholoških sposobnosti ispitanik pogađa boju 10 kuglica koje se izvlače (sa vraćanjem) iz kutije sa istim brojem belih i crnih kuglica. Formulirati hipoteze kao i test sa nivoom značajnosti 10%.

**165.** Dati su uzorci

44, 44, 56, 46, 47, 38, 58, 53, 49, 35, 46, 30, 41,

35, 47, 55, 29, 40, 39, 32, 41, 42, 57, 51, 39,

za koje pretpostavljamo da potiču iz dve normalne raspodele sa istom varijansom i matematičkim očekivanjima redom  $\mu_1$  i  $\mu_2$ . **a)** Naći dvostrani 95% interval poverenja za razliku  $\mu_1 - \mu_2$ . **b)** Testirati hipotezu  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  protiv  $H_1 : \mu_1 > \mu_2$  sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.05$ .

**166.** Dužina života jednog uređaja u prethodnoj seriji bila je normalna slučajna promenljiva sa  $\mu = 1120$  časova i  $\sigma = 125$  časova. Uzorak obima 8 iz nove serije ima srednju dužinu života 1070 časova. Testirati hipotezu da se srednja dužina života nije promenila, sa nivoom značajnosti 0.05.

**167\*** Koju najveću vrednost može imati koeficijent korelacije  $\hat{\rho}$  izračunat iz uzorka obima 18 da ne bismo odbacili hipotezu  $H_0 : \rho = 0$  testirajući je protiv hipoteze  $H_1 : \rho \neq 0$  sa nivoom značajnosti  $\alpha = 0.05$  ?

**168\*** U kutiji I imamo 1000 belih i isto toliko crnih kuglica. U kutiji II imamo 500 belih i 1500 crnih kuglica. Biramo nasumice jednu kutiju i iz nje izvlačimo uzorak obima  $n$ . Odrediti  $n$  i formulisati test koji će, na osnovu uzorka odlučiti koja je kutija izabrana, sa verovatnoćom greške manjom od 0.05.

**169.** Imamo dve grupe proizvoda. U prvoj grupi srednja vrednost neke dimenzije je  $\mu_1 = 1$ , a u drugoj grupi je  $\mu_2 = 1.1$ . Uzimamo uzorak iz jedne grupe, ali ne znamo koja je to grupa. Odrediti obim uzorka i formulisati test na osnovu koga bismo odredili vrstu proizvoda sa datom verovatnoćom greške.

**170.** Imamo dva instrumenta, koji su spolja identični, ali je jedan malo precizniji, sa  $\sigma = 1$ , dok drugi ima  $\sigma = 1.1$ . Uzimamo nasumice jedan instrument. Na osnovu ponovljenih merenja veličine za koju znamo  $\mu$ , formulisati test pomoću kog bismo zaključili koji instrument smo izabrali.

**171\*** Merenja snage stiska leve (L) i desne (D) ruke 10 levorukih osoba dala su sledeće rezultate:

	Osoba br.									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
L	140	90	125	130	95	121	85	97	131	110
D	138	87	110	132	96	120	86	90	129	100

**a)** Posmatrajući razlike dobijenih vrednosti kao uzorak iz jedne populacije, odrediti 90% interval poverenja za srednju vrednost razlike između jačine stiska leve i desne ruke. **b)** Da li bismo, na osnovu rezultata pod a), prihvatili hipotezu da nema razlike u jačini stiska leve i desne ruke kod levorukih osoba? **c)** Da li bi se u ovom primeru mogao primeniti metod poređenja razlike srednjih vrednosti dve populacije (teorema 9.4)? Obrazložiti.

## Glava 10

# Neparametarski testovi

Da li se podaci koje imamo mogu modelirati normalnom raspodelom? Da li su brojevi koje smo dobili slučajni? Da li su dva događaja nezavisna? U ovoj glavi dajemo neke načine da se odgovori na pitanja ovog tipa. Odgovori su važni, jer omogućavaju modeliranje pojava i sistema, a time i predviđanje njihovog budućeg ponašanja.